# ĆWICZENIE 3
# TESTOWANIE HIPOTEZ I ESTYMACJA PARAMETRÓW

## Cel

Przedstawienie zasad testowania hipotez i popełnianych przy tym błędów oraz wprowadzenia pojęć związanych z estymacją przedziałową.

## Wprowadzenie teoretyczne

### Testowanie hipotez

Zadaniem statystyki matematycznej jest uzyskanie informacji o populacji generalnej na podstawie próby. Zadanie to często sprowadza się do sprawdzenia hipotez dotyczących populacji generalnej na podstawie danych z próby. **Testowanie hipotez** składa się z następujących etapów.

I. **Przyjęcie założeń**, czyli wybór modelu i postawienie hipotez badawczych. Wyróżniona hipoteza, która ma podlegać weryfikacji, nazywana jest **hipotezą zerową**. Oprócz niej można formułować **hipotezy dopuszczalne**, tzn. hipotezy, które uznajemy za możliwe. Każdą hipotezą dopuszczalną, nie będącą hipotezą zerową, nazywa się **hipotezą alternatywną**. Przypuśćmy, że interesuje nas populacja ryjówki malutkiej (*Sorex minutus*) bytująca na terenie województwa dolnośląskiego. Spodziewamy się, że średnia masa ciała w tej populacji wynosi 5 g. Chcemy zweryfikować tę hipotezę, czyli hipotezę $H_0$: $\mu = 5\ g$. Hipotezami alternatywnymi będą hipotezy: $H_1$: $\mu < 5\ g$, $H_2$: $\mu > 5\ g$ lub $H_3$: $\mu \neq 5\ g$. Hipotezy typu $H_1$ oraz $H_2$ nazywa się **hipotezami jednostronnymi**, a hipotezy typu $H_3$ – **hipotezami dwustronnymi**. Odrzucenie hipotezy zerowej równoznaczne jest przyjęciu hipotezy alternatywnej. Jeżeli hipoteza alternatywna jest jednostronna, to test weryfikujący hipotezę zerową nazywa się **testem jednostronnym**, a jeżeli jest ona dwustronna, to odpowiedni test nazywa się **testem dwustronnym**.

II. **Otrzymanie rozkładu z próby**, czyli wybór rozkładu przy założonym modelu i postawionej hipotezie badawczej. W odniesieniu do wielu cech badanych przez biologów, często rozkładem tym jest rozkład normalny.

III. **Wyznaczenie poziomu istotności i obszaru krytycznego**, czyli wybór maksymalnej wartości błędu, jaki pozwalamy sobie popełnić w przeprowadzanym wnioskowaniu oraz określenie wartości statystyki testowej, dla których hipoteza zerowa zostanie odrzucona. Przystępując do testowania hipotezy zerowej zakładamy, że jest ona prawdziwa i na tej podstawie określamy statystykę testową. Znając dokładny lub przybliżony rozkład tej statystyki można określić prawdopodobieństwo $\alpha$, że przyjmie ona wartości większe lub mniejsze od pewnej ustalonej wartości granicznej $k$. Prawdopodobieństwo $\alpha$ nazywa się **poziomem istotności**, a wartość $k$ – **wartością krytyczną**. Wartości krytyczne wyznaczają tzw. **obszar krytyczny**, czyli zbiór wszystkich wartości statystyki testowej, dla których hipoteza zerowa zostanie odrzucona. W stosowanych testach statystycznych przyjmuje się najczęściej poziom istotności $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$ *lub* $\alpha = 0.001$.

IV. **Wyliczenie wartości statystyki testowej.**

V. **Podjęcie decyzji.**

W trakcie testowania hipotezy istnieje zagrożenie popełnienia dwóch podstawowych błędów – pierwszego i drugiego rodzaju. **Błąd pierwszego rodzaju** popełniamy odrzucając hipotezę zerową, jeżeli w rzeczywistości jest ona prawdziwa. Prawdopodobieństwo popełnienia tego błędu równe jest $\alpha$, więc można go kontrolować. **Błąd drugiego rodzaju** popełniamy nie odrzucając hipotezy zerowej, która w rzeczywistości jest fałszywa. Błąd ten nie może być kontrolowany, ale jest mniej „groźny” od błędu pierwszego rodzaju.

**Estymacja parametrów**

Estymator, czyli określona na podstawie próby ocena parametru, stanowi jego przybliżoną wartość. Do estymacji można podejść również w inny sposób – określić przedział, w którym znajduje się prawdziwa wartość parametru. Przedział taki nazywany jest **przedziałem ufności**. Ustala się go dla z góry założonego prawdopodobieństwa $\alpha$. Przedział $(x_1, x_2)$ jest przedziałem ufności parametru $\mu$, określonym na poziomie ufności $1\text{-}\alpha$, jeżeli $P(x_1 < \mu < x_2) = 1 - \alpha$. Przedział $(x_1, x_2)$, w którym $x_1$ i $x_2$ przyjmują wartości skończone, nazywa się **dwustronnym przedziałem ufności**.

Jeżeli zmienna losowa ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu$ i wariancji $\sigma^2$, tzn. rozkład $N(\mu, \sigma^2)$, to średnia arytmetyczna (czyli estymator wartości oczekiwanej) ma także rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu$ oraz wariancji

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \text{ czyli rozkład } N(\mu, \sigma/\sqrt{n}).$$

Gdy próba pochodzi z populacji o rozkładzie innym, niż normalny i gdy próba jest wystarczająco duża, wówczas średnia arytmetyczna ma w przybliżeniu rozkład normalny $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.

Pierwiastek z wariancji średniej arytmetycznej $\sigma_{\bar{x}}$ jest błędem standardowym, który można wykorzystać do skonstruowania przedziału ufności da wartości oczekiwanej:

$$\bar{x} - u_\alpha \sigma_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + u_\alpha \sigma_{\bar{x}},$$

gdzie jest kwantylem rozkładu normalnego rzędu $\alpha$.

W przypadku, gdy nie znamy wariancji, należy posłużyć się jej estymatorem $s^2$. Wówczas przedział ufności należy konstruować w następujący sposób:

$$\bar{x} - t_{\alpha,n-1} s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha,n-1} s_{\bar{x}},$$

gdzie jest kwantylem rozkładu t-Studenta rzędu $\alpha$ o $n\text{-}1$ stopniach swobody.

## Zadania do wykonania

1. Wyznaczyć przedziały ufności na poziomie istotności *0.05* i *0.01* dla danych zawartych w plikach *średnia5_10.txt* oraz *średnia5_1000.txt*. Określić wpływ wielkości próby oraz poziomu istotności na długość przedziału ufności.
2. Z wymienionych poniżej statystyk wybrać te, które wraz ze wzrostem próby rosną, które maleją, a które nie zależą od wielkości próby: *zakres, średnia arytmetyczna, wariancja, odchylenie standardowe, przedział ufności*.
3. Policzono jaja złożone w 20 jamkach lęgowych przez ślimaka winniczka, otrzymując średnią 30.8 jaj w jamce, z odchyleniem standardowym 6.2 jaja. Zakładając, że badana próba jest niezależną próba losową oraz, że badana cecha ma rozkład normalny, dla średniej liczby jaj w jamce lęgowej wyznaczyć 95% i 99% przedział ufności.
4. Dostawca sałaty do sieci prywatnych restauracji gwarantował, że średnia zawartość ołowiu w jego sałacie nie przekracza 0.10 ppm. Kupujący polecił sprawdzić 16 losowo i niezależnie wybranych próbek sałaty (10 g suchej masy każda) i otrzymał w nich średnią zawartość ołowiu wynoszącą 0.11 ppm, z odchyleniem standardowym 0.02 ppm. Przy założeniu, że zawartość ołowiu w sałacie ma rozkład normalny, wyznaczyć 95% i 99% przedział ufności dla średniej zawartości ołowiu w sałacie.

**UWAGA:** do rozwiązania zadań przydatne będą tablice kwantyli standardowego rozkładu normalnego N(0, 1) oraz kwantyli rozkładu t-Studenta (www.theta.edu.pl).

*Źródła:*


- *Łomnicki A. „Wprowadzenie do statystyki dla przyrodników”, PWN, Warszawa 2007*
- *Żuk B. „Biometria stosowana”, PWN, Warszawa 1989*