

# STATYSTYKA MATEMATYCZNA

---

1. Wykład wstępny
- 2. Teoria prawdopodobieństwa i elementy kombinatoryki**
3. Zmienne losowe
4. Populacje i próby danych
5. Testowanie hipotez i estymacja parametrów
6. Test t
7. Test  $\chi^2$
8. Test F
9. Testy nieparametryczne
10. Podsumowanie dotychczasowego materiału, wspólna analiza przykładów, dyskusja
11. Korelacja
12. Regresja liniowa i nieliniowa
13. Określenie jakości dopasowania równania regresji liniowej i nieliniowej
14. Analiza wariancji
15. Podsumowanie dotychczasowego materiału, wspólna analiza przykładów, dyskusja

1. Co to jest prawdopodobieństwo ?
2. Prawdopodobieństwo warunkowe
3. Prawdopodobieństwo łączne
4. Wzór Bayesa
5. Dodawanie prawdopodobieństw
6. Elementy kombinatoryki

# PRAWDOPODOBIENSTWO

# CO TO JEST PRAWDOPODOBIEŃSTWO (*probability*) ?

<http://www.bbc.co.uk/schools/ks2bitesize/maths/data/probability/play.shtml>

Drag the pulsating blue and red balls on to the correct positions on the probability line and click Done.

Try me

Done

Help

Impossible Unlikely Even chance Likely Certain

# CO TO JEST PRAWDOPODOBIEŃSTWO ?

---

**Prawdopodobieństwo → analiza statystyczna**

- **testowanie hipotez**
- **przedziały ufności**

**Prawdopodobieństwo → na codzień**

- **opady deszczu są bardzo prawdopodobne**

**Prawdopodobieństwo → praktyka zawodowa**

- **w 1 na 100 wyźrebień klaczy pełnej krwi angielskiej rodzą się bliźnięta**

# CO TO JEST PRAWDOPODOBIEŃSTWO ?

---

## Prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia A

- $P(A)$
- mierzymy w skali od 0 do 1       $P(A) \in [ 0, 1 ]$
- kiedy  $P(A) \rightarrow 1$  ?    Przykład
- kiedy  $P(A) \rightarrow 0$  ?    Przykład
- zdarzenie pewne  $P(A)=?$       Przykład
- zdarzenie niemożliwe  $P(A)=?$     Przykład

# CO TO JEST PRAWDOPODOBIEŃSTWO ?

---

Pojęcie prawdopodobieństwa → XVII wiek

- Blaise Pascal



- Pierre de Fermat



# CO TO JEST PRAWDOPODOBIEŃSTWO ?

---

$$P(A) = \frac{m}{N}$$

liczba wystąpień  
zdarzenia A

liczba wszystkich  
prób

**PRZYKŁAD**



## Journal of Psychiatric Research (2003) Carter i wsp.

- wystąpienie choroby dwubiegunowej
- w zależności od wieku
- ... i uwarunkowań rodzinnych
- 318 pacjentów

historia choroby w rodzinie	wystąpienie choroby dwubiegunowej		
	<18 lat (E)	≥18 lat (L)	
nie występuje (A)	28	35	<b>63</b>
dwubiegunowa (B)	19	38	<b>57</b>
jednobiegunowa (C)	41	44	<b>85</b>
jedno- i dwubiegunowa (D)	53	60	<b>113</b>
	<b>141</b>	<b>177</b>	<b>318</b>

# PRAWDOPODOBIEŃSTWO BRZEGOWE (*marginal probability*)

historia choroby w rodzinie	wystąpienie choroby dwubiegunowej		
	<18 lat (E)	≥18 lat (L)	
nie występuje (A)	28	35	63
dwubiegunowa (B)	19	38	57
jednobiegunowa (C)	41	44	85
jedno- i dwubiegunowa (D)	53	60	113
	141	177	318

- **Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany chory na chorobę dwubiegunową ma poniżej 18 lat,  $P(E)$**

$$P(E) = \frac{141}{318} = 0.4434$$

- **Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany chory jest dzieckiem zdrowych rodziców,  $P(A)$**

$$P(A) = \frac{63}{318} = 0.1981$$

# ZDARZENIA DOPELNIAJĄCE SIĘ (*complementary events*)

historia choroby w rodzinie	wystąpienie choroby dwubiegunowej		
	<18 lat (E)	≥18 lat (L)	
nie występuje (A)	28	35	63
dwubiegunowa (B)	19	38	57
jednobiegunowa (C)	41	44	85
jedno- i dwubiegunowa (D)	53	60	113
	141	177	318

- **Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany chory ma poniżej 18 lat,  $P(E)$**

$$P(E) = \frac{141}{318} = 0.4434$$

- **Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany chory ma co najmniej 18 lat,  $P(L)$**

$$P(L) = P(\bar{E}) = \frac{177}{318} = 0.5566$$

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

# PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE (*conditional pr.*)

historia choroby w rodzinie	wystąpienie choroby dwubiegunowej		
	<18 lat (E)	≥18 lat (L)	
nie występuje (A)	28	35	63
dwubiegunowa (B)	19	38	57
jednobiegunowa (C)	41	44	85
jedno- i dwubiegunowa (D)	53	60	113
	141	177	318

- **Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany chory poniżej 18 lat pochodzi ze zdrowej rodziny**
- **Warunek → chory ma poniżej 18 lat**
- **Prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie E,  $P(A | E)$**

$$P(A | E) = \frac{28}{141} = 0.1986$$

# PRAWDOPODOBIEŃSTWO ŁĄCZNE (*joint probability*)

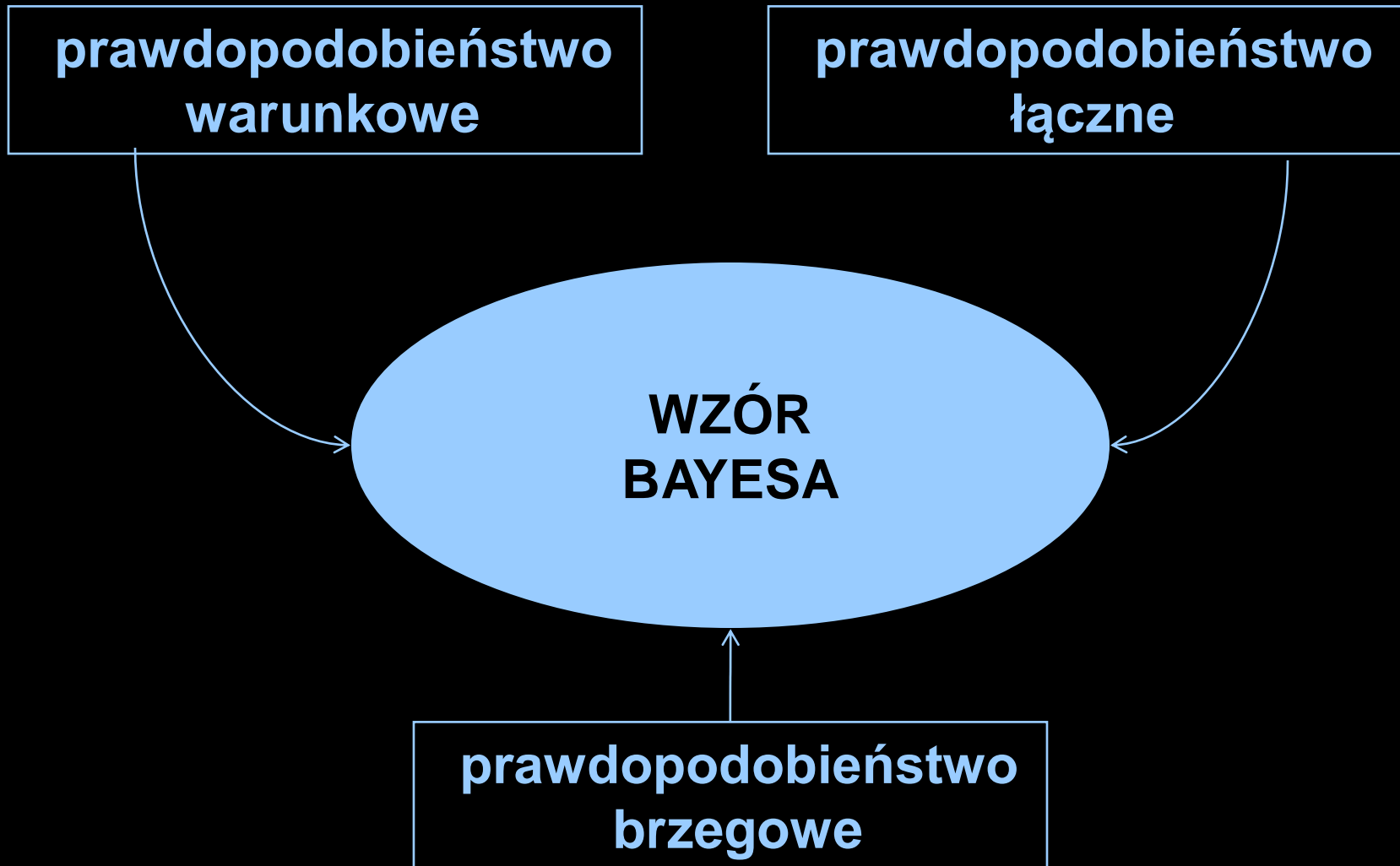
historia choroby w rodzinie	wystąpienie choroby dwubiegunowej		
	<18 lat (E)	≥18 lat (L)	
nie występuje (A)	28	35	63
dwubiegunowa (B)	19	38	57
jednobiegunowa (C)	41	44	85
jedno- i dwubiegunowa (D)	53	60	113
	141	177	318

- Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany chory ma poniżej 18 lat i pochodzi ze zdrowej rodziny
- Warunek → brak, wybór spośród wszystkich chorych
- Prawdopodobieństwo łącznego zajścia zdarzeń A i E,  $P(AE)$

$$P(A \cap E) = P(AE) = \frac{28}{318} = 0.0881$$

# WZÓR BAYESA

---



# WZÓR BAYESA

---

prawdopodobieństwo  
warunkowe

prawdopodobieństwo  
łączone

$$P(A | E) = \frac{P(AE)}{P(E)}$$

prawdopodobieństwo  
brzegowe

# WZÓR BAYESA

---

prawdopodobieństwo  
warunkowe

prawdopodobieństwo  
łączone

$$P(AE) = P(A | E)P(E)$$

prawdopodobieństwo  
brzegowe

# WZÓR BAYESA

historia choroby w rodzinie	wystąpienie choroby dwubiegunowej		
	<18 lat (E)	≥18 lat (L)	
nie występuje (A)	28	35	63
dwubiegunowa (B)	19	38	57
jednobiegunowa (C)	41	44	85
jedno- i dwubiegunowa (D)	53	60	113
	141	177	318

- **Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany chory poniżej 18 lat pochodzi ze zdrowej rodziny**

$$P(A | E) = \frac{P(AE)}{P(E)} = \frac{28 / 318}{141 / 318} = 0.1986$$

- **Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany chory ma poniżej 18 lat i pochodzi ze zdrowej rodziny**

$$P(AE) = P(A | E)P(E) = \frac{28}{141} \cdot \frac{141}{318} = 0.0881$$

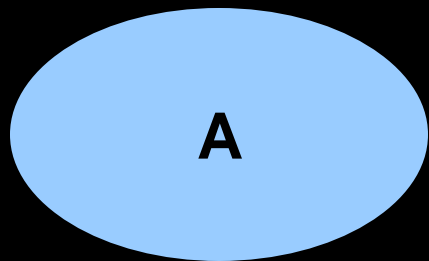
# DODAWANIE PRAWDOPODOBIENSTW

historia choroby w rodzinie	wystąpienie choroby dwubiegunowej		
	<18 lat (E)	≥18 lat (L)	
nie występuje (A)	28	35	63
dwubiegunowa (B)	19	38	57
jednobiegunowa (C)	41	44	85
jedno- i dwubiegunowa (D)	53	60	113
	141	177	318

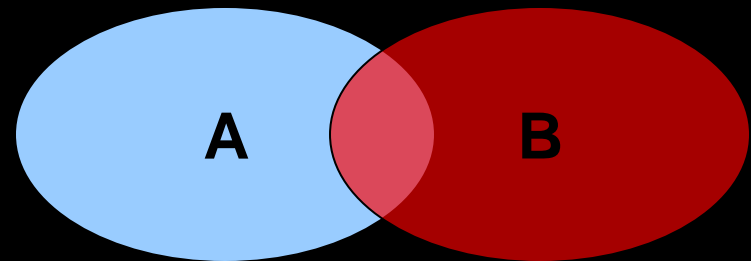
- **Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany chory ma powyżej 18 lat  $P(L)$  lub że losowo wybrany chory pochodzi ze zdrowej rodziny  $P(A)$ ;  $P(L \cup A)$**

$$P(L \cup A) = P(L) + P(A) - P(LA) = \frac{177}{318} + \frac{63}{318} - \frac{35}{318} = 0.64$$

# ZDARZENIA ZALEŻNE I NIEZALEŻNE



**ZDARZENIA NIEZALEŻNE**  
*(independent events)*



**ZDARZENIA ZALEŻNE**  
*(dependent events)*

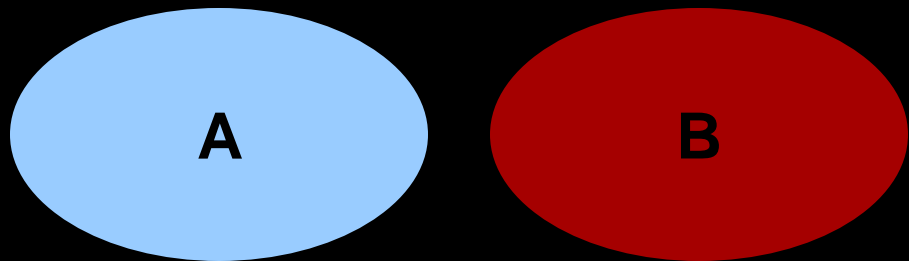
- **Prawdopodobieństwo warunkowe**

$$P(A | B) = P(A)$$

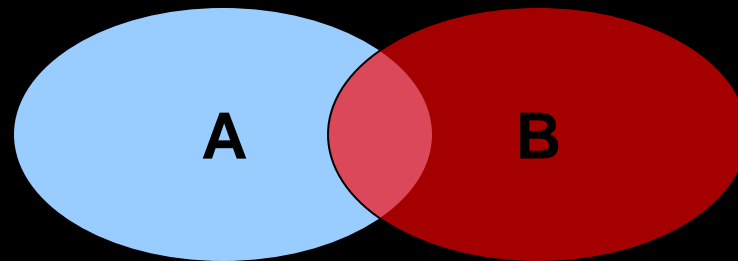
$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)}$$

# ZDARZENIA ZALEŻNE I NIEZALEŻNE



ZDARZENIA NIEZALEŻNE



ZDARZENIA ZALEŻNE

- **Prawdopodobieństwo łączne**

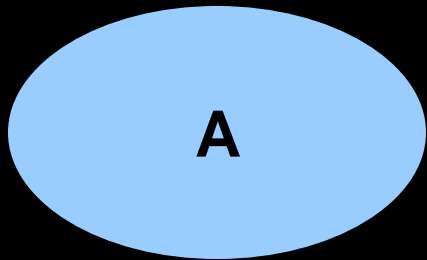
$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(AB) = P(A | B)P(B)$$

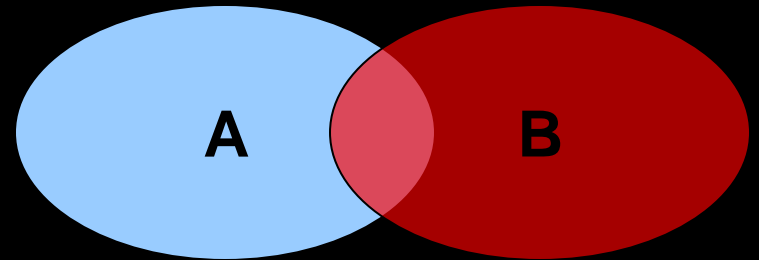
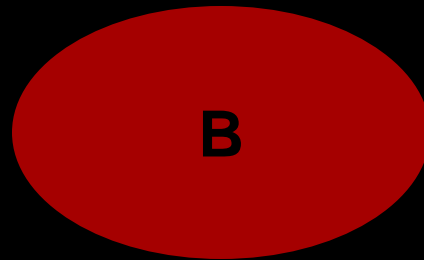
$$P(AB) = P(A | B)P(B) = P(A)P(B)$$

# ZDARZENIA ZALEŻNE I NIEZALEŻNE

---



ZDARZENIA NIEZALEŻNE



ZDARZENIA ZALEŻNE

- Suma prawdopodobieństw

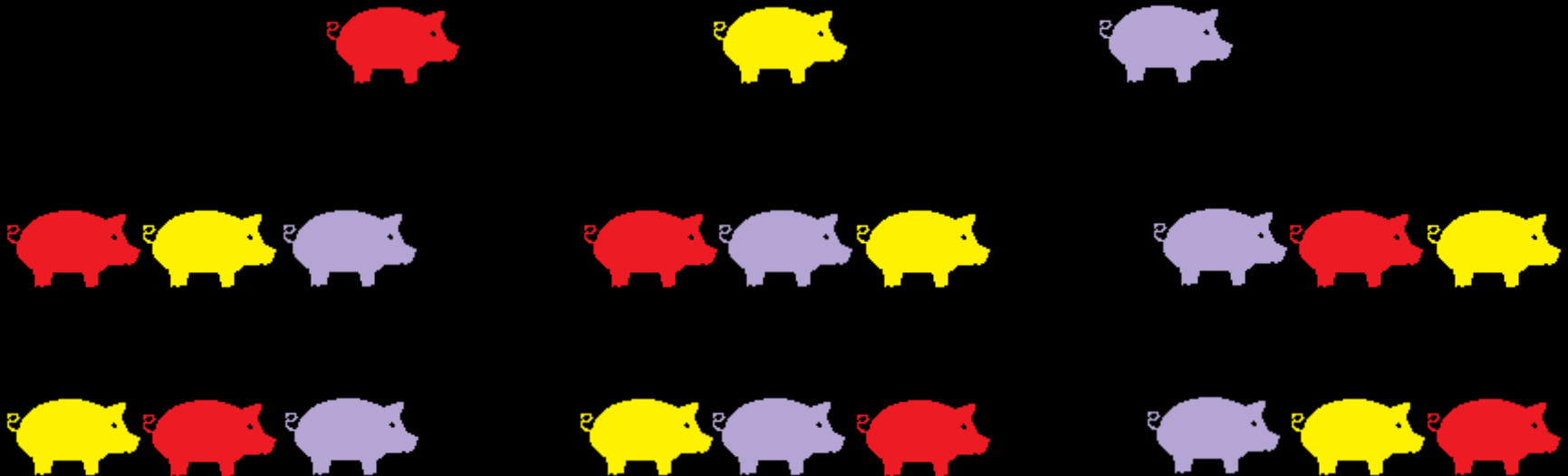
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

# KOMBINATORYKA

# PERMUTACJE

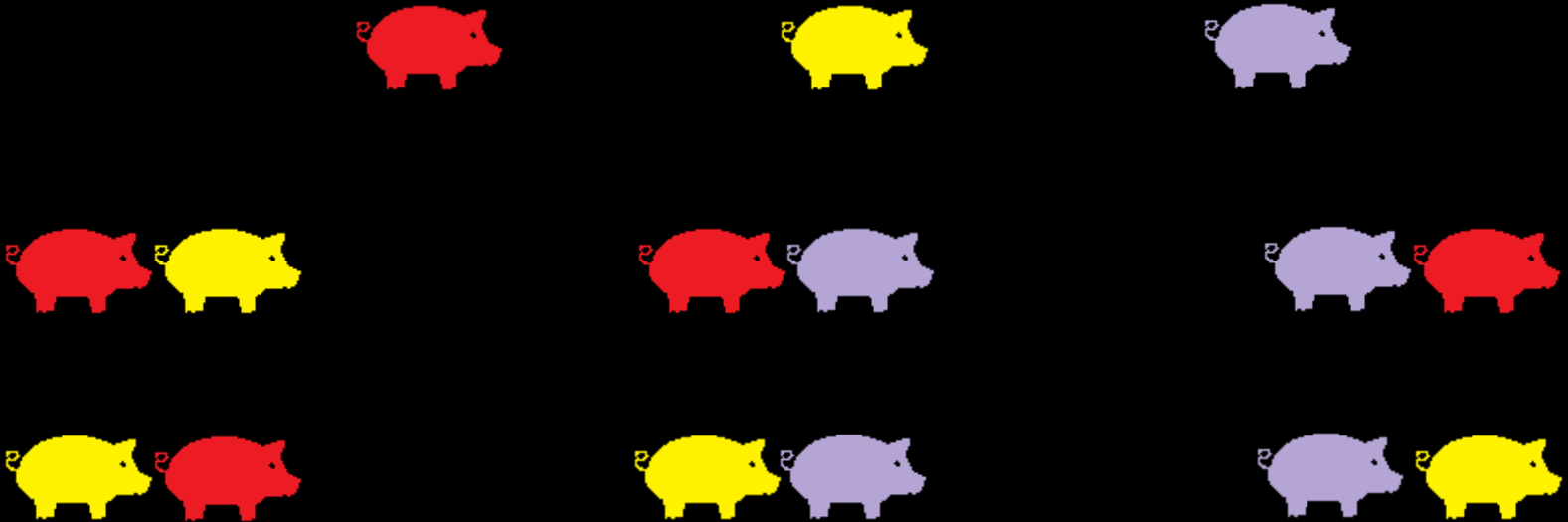
- Zestawy wszystkich elementów zbioru z uwzględnieniem kolejności



$$n! = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

# WARIACJE

- Zestawy  $k$  elementów ze zbioru z uwzględnieniem kolejności



$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

# KOMBINACJE

---

- Zestawy  $k$  elementów ze zbioru bez uwzględnienia kolejności



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3$$

- 1. Co to jest prawdopodobieństwo ?**
- 2. Prawdopodobieństwo warunkowe**
- 3. Prawdopodobieństwo łączne**
- 4. Wzór Bayesa**
- 5. Dodawanie prawdopodobieństw**
- 6. Elementy kombinatoryki**