

STATYSTYKA MATEMATYCZNA

1. Wykład wstępny
2. Teoria prawdopodobieństwa i elementy kombinatoryki
3. Zmienne losowe
4. Populacje i próby danych
- 5. Testowanie hipotez i estymacja parametrów**
6. Test t
7. Test χ^2
8. Test F
9. Testy nieparametryczne
10. Podsumowanie dotychczasowego materiału, wspólna analiza przykładów, dyskusja
11. Korelacja
12. Regresja liniowa i nieliniowa
13. Określenie jakości dopasowania równania regresji liniowej i nieliniowej
14. Analiza wariancji
15. Podsumowanie dotychczasowego materiału, wspólna analiza przykładów, dyskusja

1. Testowanie hipotez

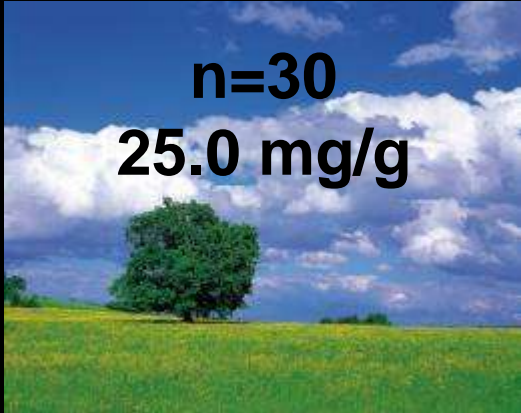
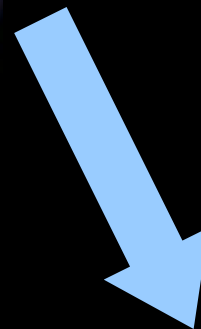
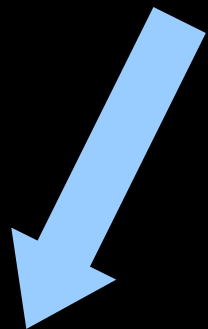
- **Błędy związane z testowaniem hipotez**
- **Etapy testowania hipotez**
- **Testowanie wielokrotne**

2. Estymacja parametrów


- **Błąd standardowy**
- **Przedział ufności**

WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE

Omulek słodkowodny
Hyridella menziesi



n=30
25.0 mg/g



n=30
22.9 mg/g

1. „Na oko” – różnica

2. UWAGA !!!

3. **Błąd próbkowania**

4. Estymatory różne

5. Parametry różne/równe

6. ???

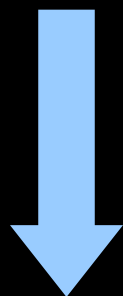
7. Wnioskowanie statystyczne



WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE



PRÓBA DANYCH



WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE
statistical inference

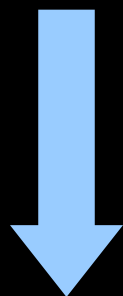


POPULACJA

WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE



PRÓBA DANYCH



PRAWDOPODOBIENSTWO

probability



POPULACJA

WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE



TESTOWANIE HIPOTEZ

ESTYMACJA PARAMETRÓW

TESTOWANIE HIPOTEZ

H_0 - hipoteza zerowa

H_1 - hipoteza alternatywna

$$H_0 + H_1 = 1$$

- H_1 jest odwrotnością H_0
- Testowanie hipotez dotyczy przyjęcia lub odrzucenia H_0

TESTOWANIE HIPOTEZ

np.

1 PARAMETR

H_0 : koncentracja lipidów w gr. doświadczalnej wynosi 25.0 mg/g

H_1 : koncentracja lipidów w gr. doświadczalnej jest inna

H_1

H_0

H_1

$H_0: k = 25.0$

$H_1: k \neq 25.0$

H_0 : koncentracja lipidów w gr. doświadczalnej przekracza 25.0 mg/g

H_1 : koncentracja lipidów w gr. doś. jest mniejsza lub równa 25.0 mg/g

H_1

H_0

$H_0: k > 25.0$

$H_1: k \leq 25.0$

TESTOWANIE HIPOTEZ

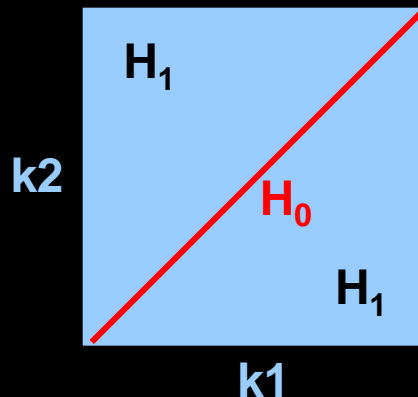
np.

2 PARAMETRY

H_0 : koncentracja lipidów w gr. doświadczalnej jest równa koncentracji w gr. kontrolnej

H_1 : koncentracja lipidów w gr. doświadczalnej i kontrolnej są różne

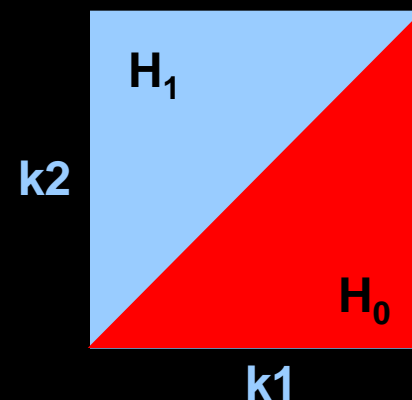
$H_0: k_1 = k_2$ $H_1: k_1 \neq k_2$







H_0 : koncentracja lipidów w gr. doświadczalnej jest wyższa niż w gr. kontrolnej

H_1 : koncentracja lipidów w gr. doświadczalnej jest niższa lub równa gr. kontrolnej

$H_0: k_1 > k_2$ $H_1: k_1 \leq k_2$



BŁĘDY ZWIĄZANE Z TESTOWANIEM HIPOTEZ


BŁĘDY		PRAWDZIWA HIPOTEZA	
		H_0	H_1
PRZYJĘTA HIPOTEZA	H_0		β 
	H_1	α 	

α - błąd I-go rodzaju (*type I error*)

β - błąd II-go rodzaju (*type II error*)

BŁĘDY ZWIĄZANE Z TESTOWANIEM HIPOTEZ

BŁĄD I-go RODZAJU

BŁĘDY	PRAWDZIWA HIPOTEZA	
	H_0	H_1
PRZYJĘTA HIPOTEZA	H_0	
	H_1	

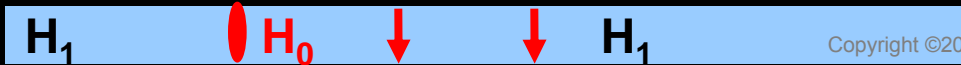
- prawdopodobieństwo błędnego odrzucenie prawdziwej H_0
- poziom istotności testu (*significance level*)
- P wartość (*P value*)
- np. jeżeli $\alpha=0.05$ to na 100 testów w 5 niepotrzebnie odrzucono H_0
- kontrolujemy w czasie testowania

BŁĘDY ZWIĄZANE Z TESTOWANIEM HIPOTEZ

BŁĄD II-go RODZAJU

BŁĘDY	PRAWDZIWA HIPOTEZA	
	H_0	H_1
PRZYJĘTA HIPOTEZA	H_0	
	H_1	

- prawdopodobieństwo odrzucenie prawdziwej H_1
- $1-\beta$ – moc testu (*power*)
- określenie mocy: symulacje, numerycznie
- zależy od informatywności próby danych: liczebność, struktura, odstępstwo od H_0



BŁĘDY ZWIĄZANE Z TESTOWANIEM HIPOTEZ

ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY α I $1-\beta$

przyjęta H_1

poziom istotności



α

-3

-2

-1

0

1

2

3

prawdziwa H_0



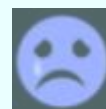
$1-\alpha$

przyjęta H_0

prawdziwa H_1



$1-\beta$



β

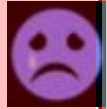
moc

BŁĘDY ZWIĄZANE Z TESTOWANIEM HIPOTEZ

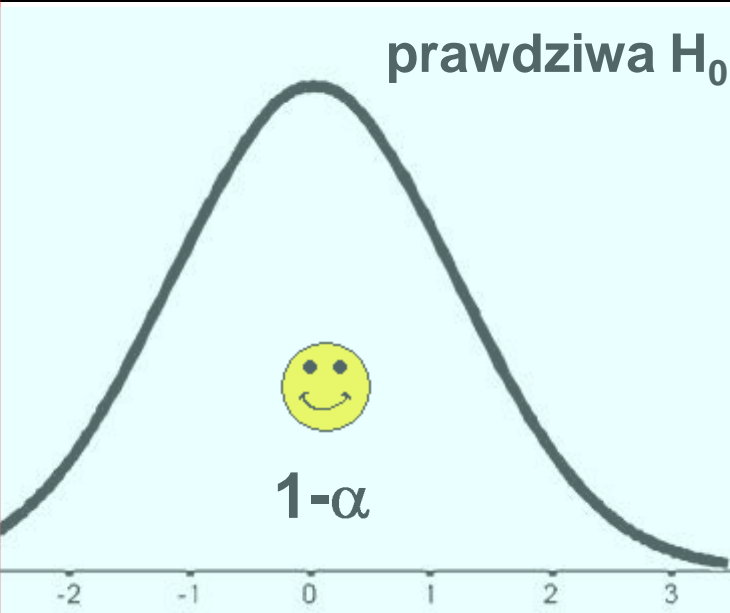
ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY α I $1-\beta$

przyjęta H_1

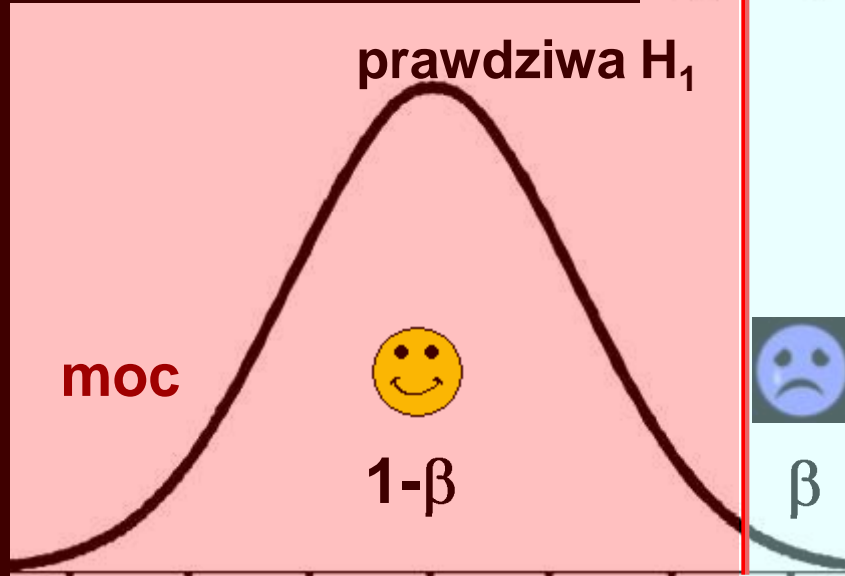
poziom istotności



α



przyjęta H_0



ETAPY TESTOWANA HIPOTEZ

1. Określenie hipotez H_0 i H_1

$$H_0: k_1 \leq k_2$$

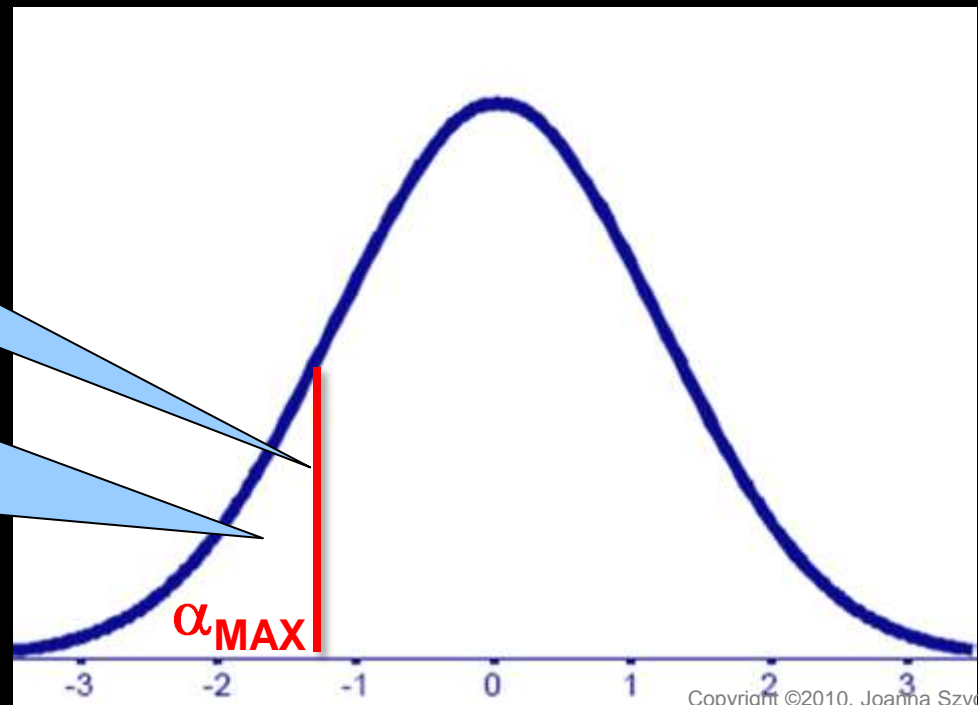
$$H_1: k_1 > k_2$$

2. Ustalenie poziomu istotności, czyli **teoretycznego** maksymalnego błędu α pozwalającego na odrzucenie H_0 ,

$$\alpha_{MAX}=0.05$$

wartość krytyczna

prawdopodobieństw
o uzyskania wartości
mniejszej lub równej
wartości krytycznej



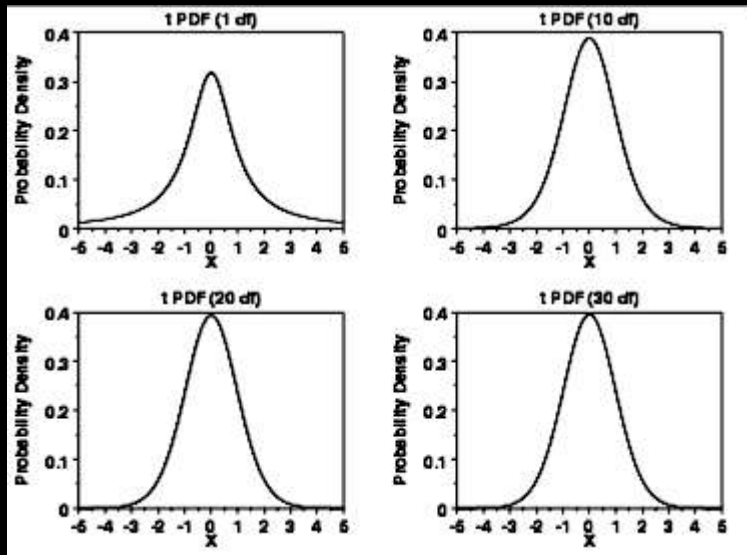
ETAPY TESTOWANA HIPOTEZ

3. Wybór i obliczenie wartości testu statystycznego

$$t = \frac{\hat{k}_1 - \hat{k}_2}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}}$$

4. Określenie rozkładu testu statystycznego stopnie swobody (*degrees of freedom*)

wartość określająca kształt rozkładu testu w zależności od ilości obserwacji w próbie



$$t = \frac{\hat{k}_1 - \hat{k}_2}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}} \sim t_{N_1 + N_2 - 2}$$

ETAPY TESTOWANA HIPOTEZ

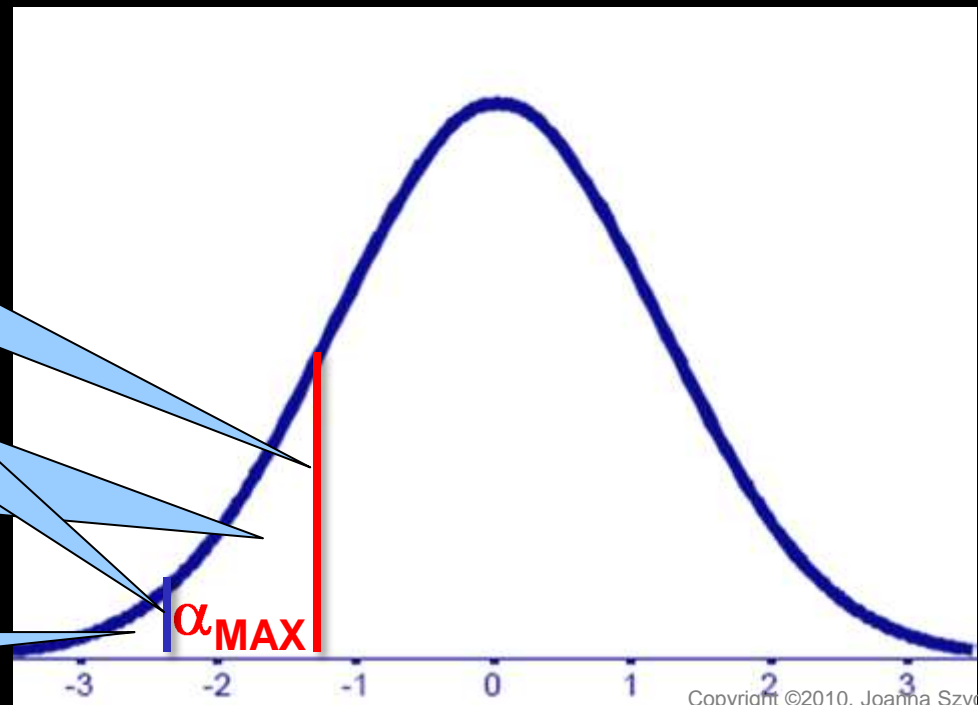
5. Na podstawie 3. i 4. obliczenie poziomu błędu α **dla danego eksperymentu** (wartość P, *P value*)
określa prawdopodobieństwo otrzymania wartości równej lub niższej od wartości uzyskanej w danym eksperymencie pod warunkiem, że H_0 jest prawdziwa

$$\alpha_T = P = 0.02$$

wartość testu

prawdopodobieństw
o uzyskania wartości
mniejszej lub równej
wartości krytycznej

α_T



6. Decyzja dotycząca przyjęcia lub odrzucenia H_0
im niższa wartość P tym większe przesłanki do
odrzucenia H_0

np. $\alpha_{MAX} = 0.05$

$\alpha_T = P = 0.02$

~~H_0~~

H_1

??

np. $\alpha_{MAX} = 0.05$

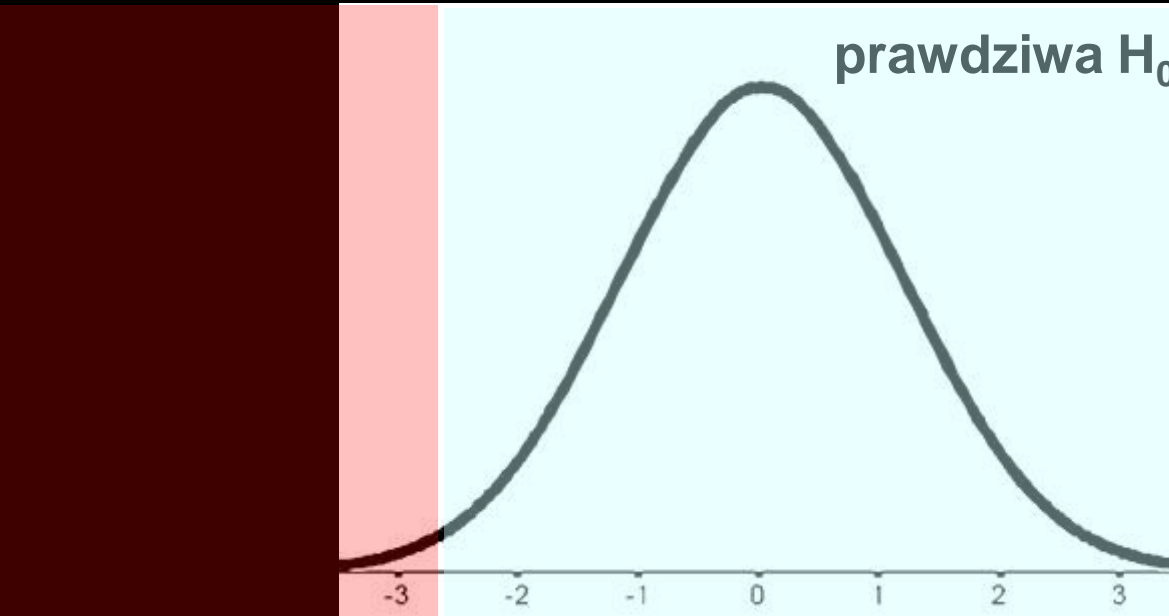
$\alpha_T = P = 0.21$

H_0

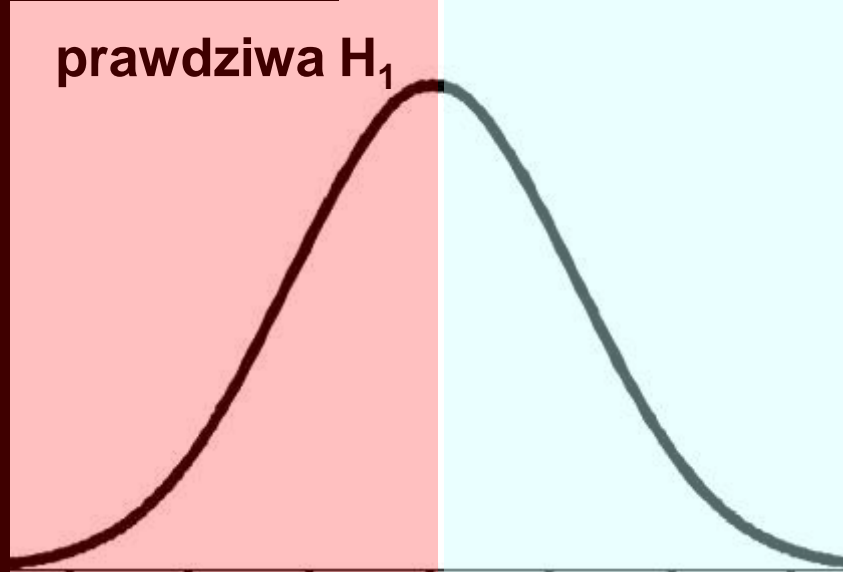
~~H_1~~

??

przyjęta H_1

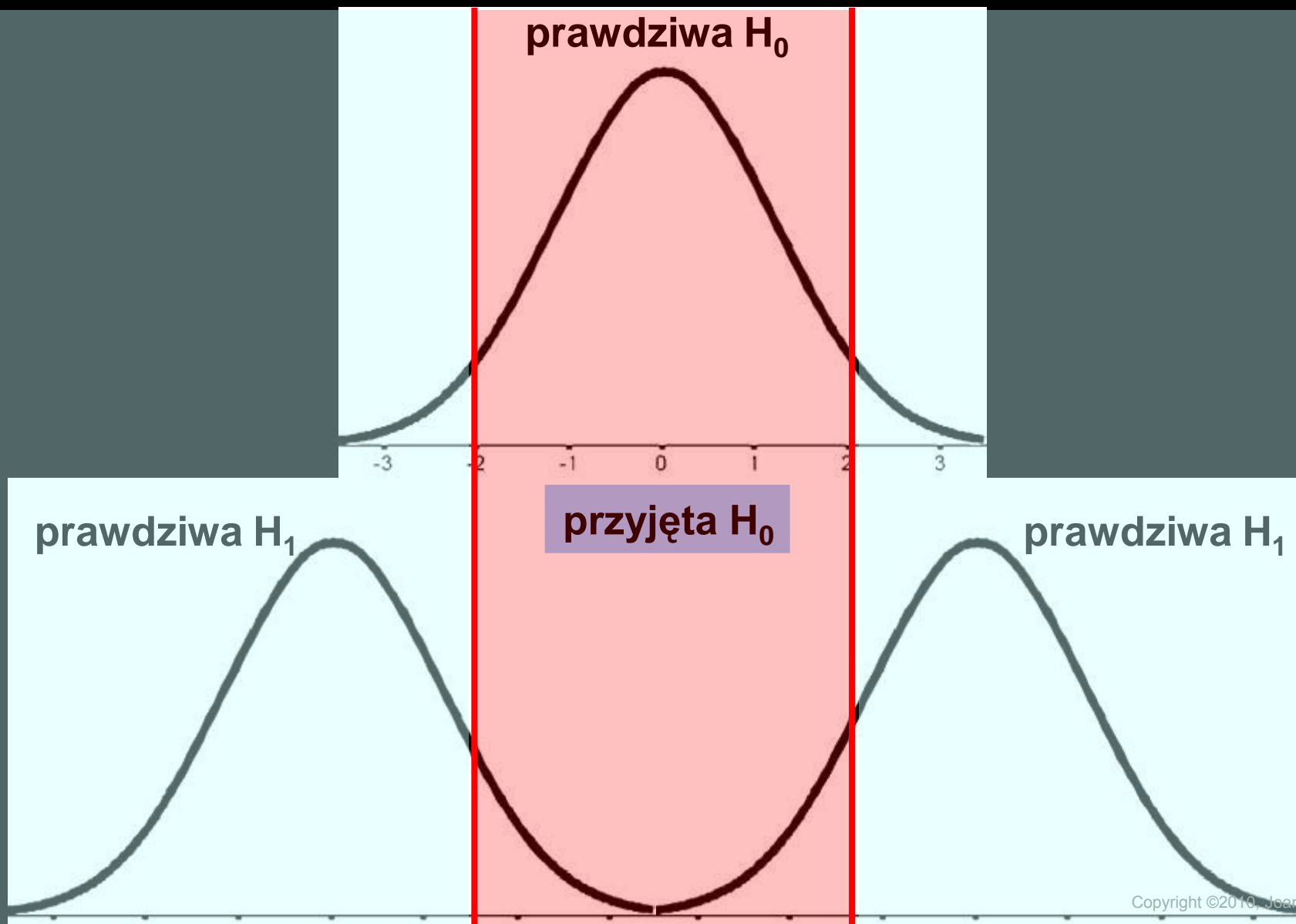


przyjęta H_0



przyjęta H_1

przyjęta H_1



TESTOWANIE WIELOKROTNE

- 1 $H_0: k_1 \leq k_2 / H_1: k_1 > k_2 \rightarrow \alpha_{MAX} = 0.05 \rightarrow t \rightarrow \alpha_T \rightarrow H_0/H_1 \rightarrow 5\%$ 😞
- 2 $H_0: k_1 \leq k_2 / H_1: k_1 > k_2 \rightarrow \alpha_{MAX} = 0.05 \rightarrow t \rightarrow \alpha_T \rightarrow H_0/H_1 \rightarrow 5\%$ 😞
- 3 $H_0: k_1 \leq k_2 / H_1: k_1 > k_2 \rightarrow \alpha_{MAX} = 0.05 \rightarrow t \rightarrow \alpha_T \rightarrow H_0/H_1 \rightarrow 5\%$ 😞
- ...
- 10 $H_0: k_1 \leq k_2 / H_1: k_1 > k_2 \rightarrow \alpha_{MAX} = 0.05 \rightarrow t \rightarrow \alpha_T \rightarrow H_0/H_1 \rightarrow 5\%$ 😞

CAŁKOWITY BŁĄD I-go RODZAJU $\alpha_{MAX} \approx 0.05 * 10 = 50\%$ 😞

TESTOWANIE WIELOKROTNE

Jak temu zaradzić ① ?

KOREKTA BONFERRONIEGO → testy niezależne od siebie



$$\alpha_{MAX*} = \alpha_{MAX} / N \rightarrow \alpha_{MAX*} = 0.05 / 10 \rightarrow \alpha_{MAX*} = 0.005$$



$$\alpha_{MAX*} = \alpha_{MAX} / N \rightarrow \alpha_{MAX*} = 0.05 / 10 \rightarrow \alpha_{MAX*} = 0.005$$

...





$$\alpha_{MAX*} = \alpha_{MAX} / N \rightarrow \alpha_{MAX*} = 0.05 / 10 \rightarrow \alpha_{MAX*} = 0.005$$

CAŁKOWITY BŁĄD I-go RODZAJU $\alpha_{MAX} \approx 0.005 * 10 = 5\%$

TESTOWANIE WIELOKROTNE

Jak temu zaradzić ② ?

KOREKTA FALSE DISCOVERY RATE (FDR) → testy zależne

BŁĘDY		PRAWDZIWA HIPOTEZA	
		H ₀	H ₁
PRZYJĘTA HIPOTEZA	H ₀		
	H ₁		

$$\text{FDR} = E \left[\frac{\text{Sad face emoji}}{\text{Sad face emoji} + \text{Happy face emoji}} \right]$$

WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE

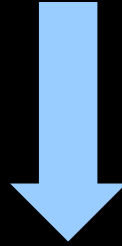


TESTOWANIE HIPOTEZ

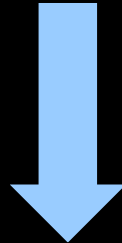
ESTYMACJA PARAMETRÓW

BŁĄD STANDARDOWY

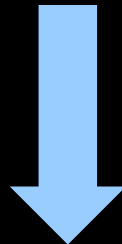
JAK DOKŁADNY JEST DANY ESTYMATOR ???



BŁĄD STANDARDOWY

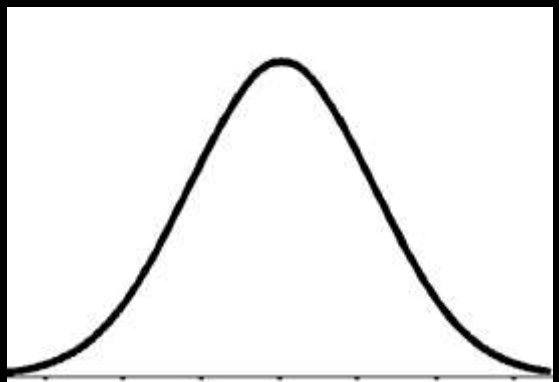
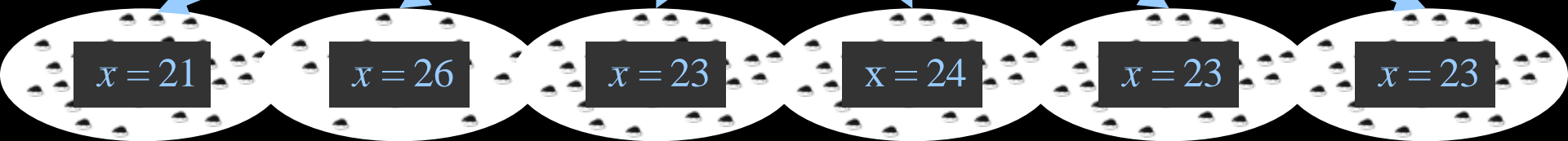
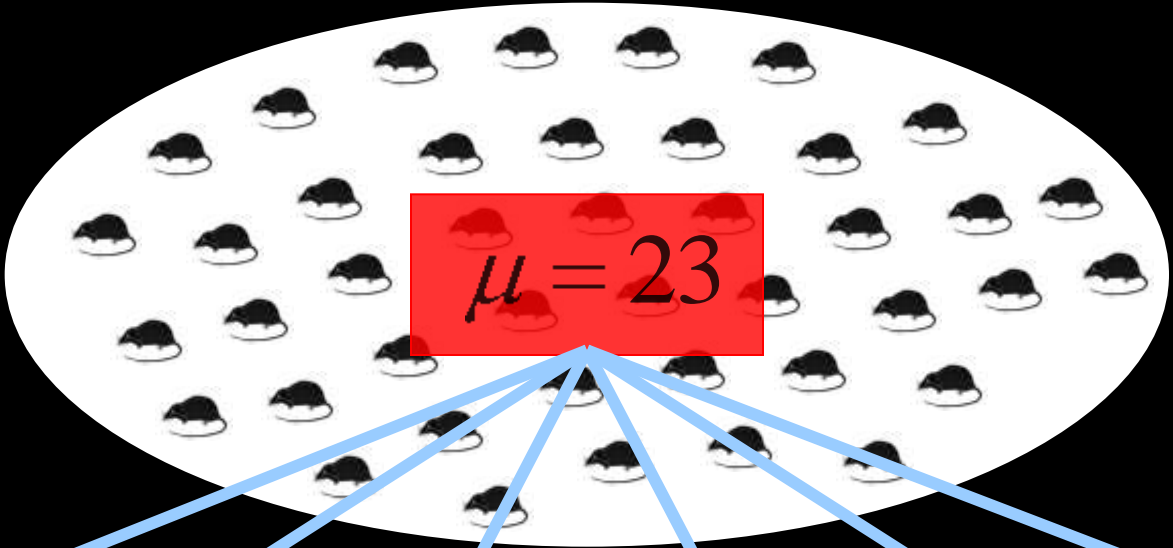


PRZEDZIAŁ UFNOŚCI



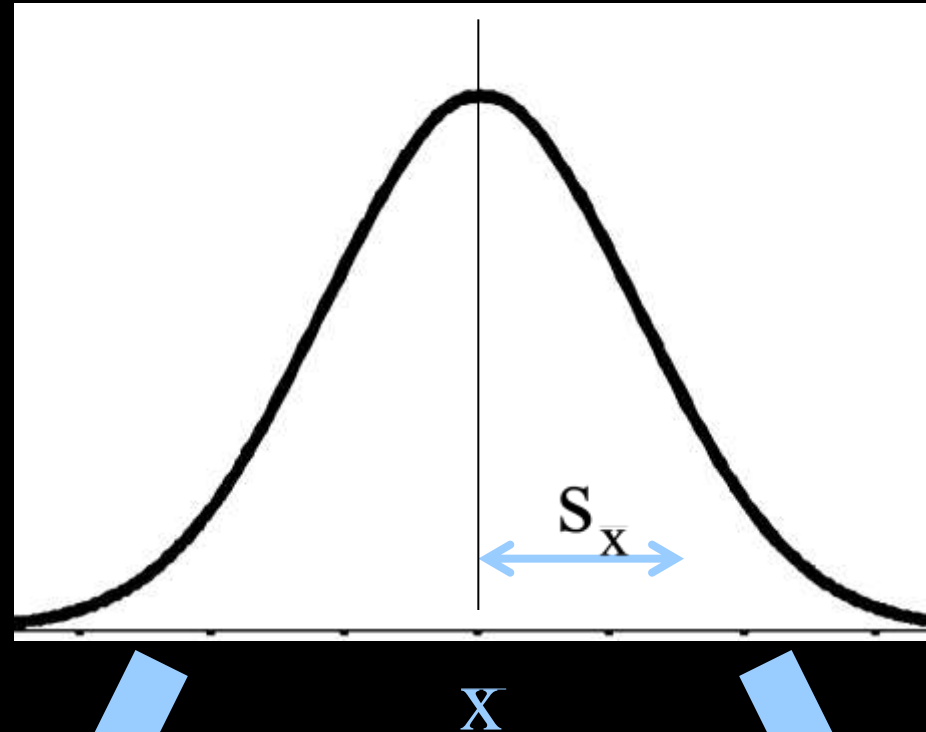
X

BŁĄD STANDARDOWY



BŁĄD STANDARDOWY ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

Błąd standardowy estymatora średniej: odchylenie standardowe rozkładu estymatora średniej



Jaki jest rozkład \bar{X} ?

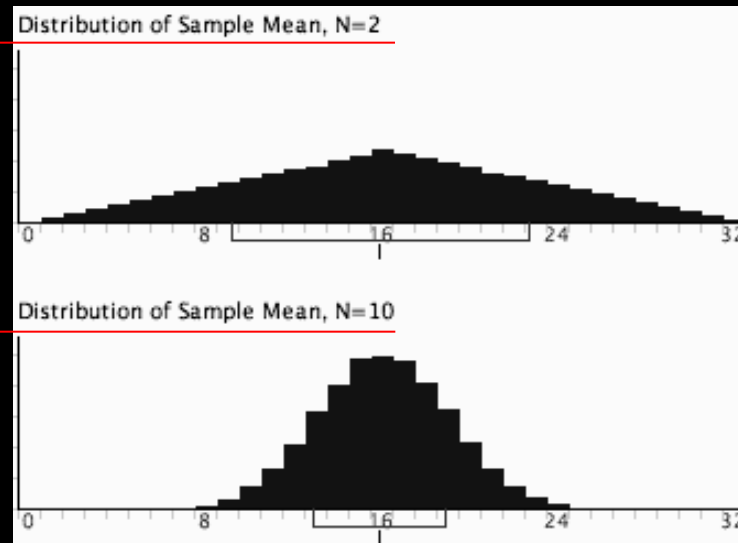
Jak obliczyć $S_{\bar{X}}$?

BŁĄD STANDARDOWY ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

Jaki rozkład ma estymator średniej?

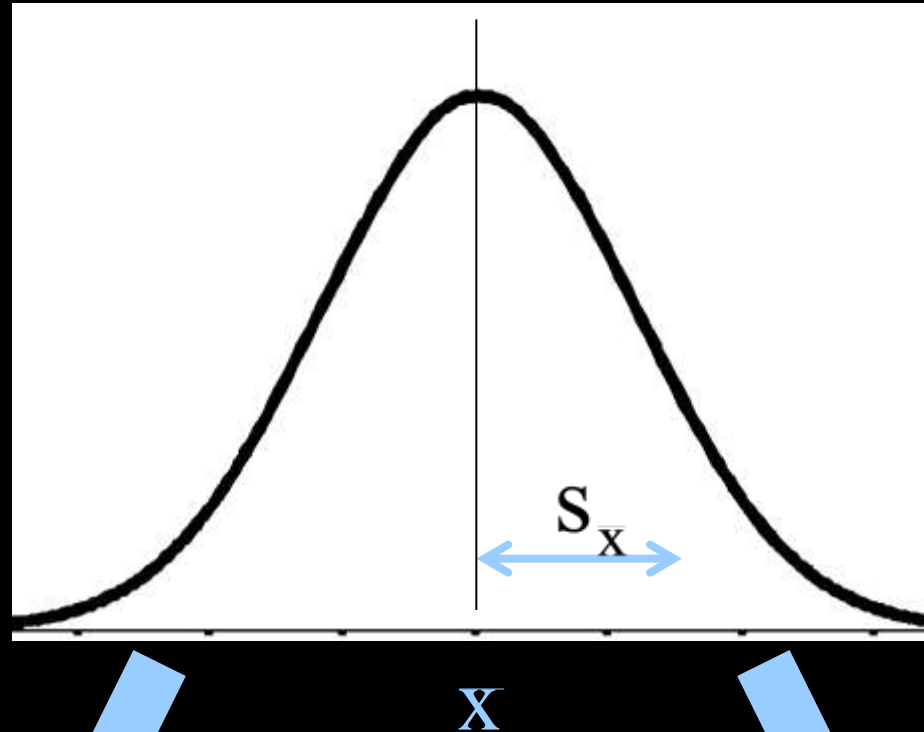
Dla dużych prób danych (N):

- rozkład estymatora średniej zbliża się do rozkładu Normalnego
- estymator średniej zbliża się do prawdziwej wartości parametru próby
- niezależnie od rozkładu obserwacji w próbie danych 😊



BŁĄD STANDARDOWY ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

Błąd standardowy estymatora średniej (*standard error*):
odchylenie standardowe rozkładu estymatora średniej



Jaki jest rozkład \bar{X} ?

Jak obliczyć $S_{\bar{X}}$?

BŁĄD STANDARDOWY ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

Jak obliczyć odchylenie standardowe rozkładu średniej (bez konieczności pobierania wielu prób danych) ?

Odchylenie standardowe w próbie danych:

$$S_x = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$

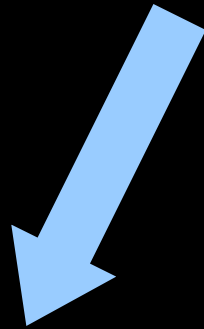
Liczebność próby danych

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i - \bar{x}}{N-1}}$$

BŁĄD STANDARDOWY ŚREDNIEJ

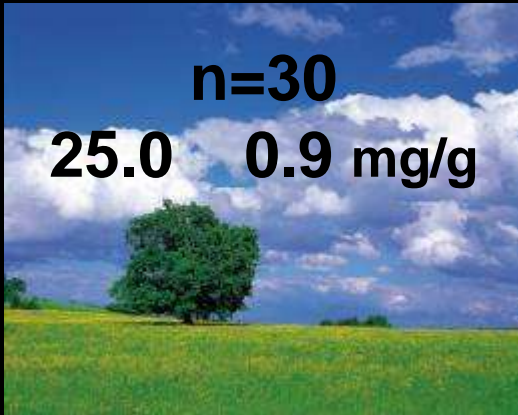
WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE

Omulek słodkowodny
Hyridella menziesi



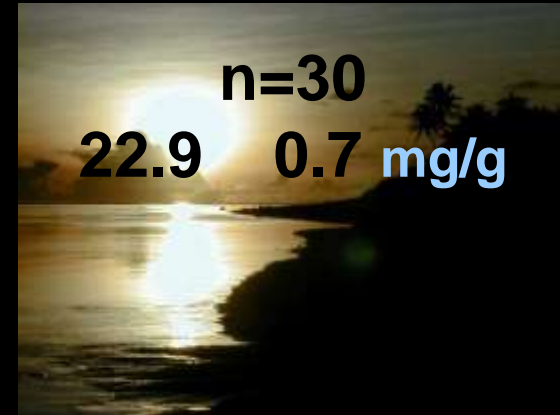
n=30

25.0 0.9 mg/g



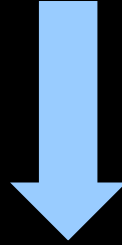
n=30

22.9 0.7 mg/g

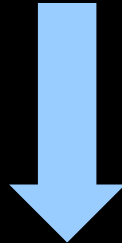


PRZEDZIAŁ UFNOŚCI ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

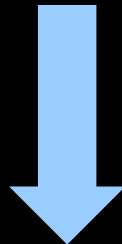
JAK DOKŁADNY JEST DANY ESTYMATOR ???



BŁĄD STANDARDOWY



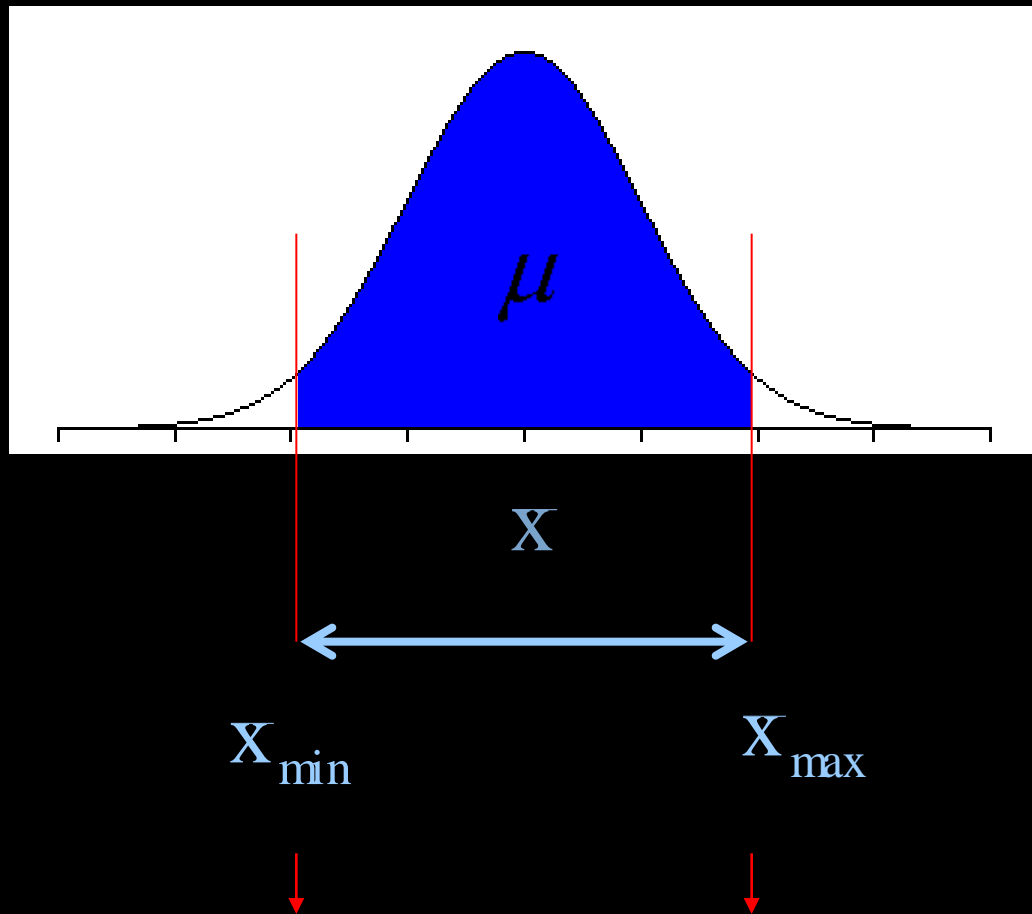
PRZEDZIAŁ UFNOŚCI



\bar{X}

PRZEDZIAŁ UFNOŚCI ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

Przedział ufności dla estymatora średniej: przedział w jakim z określonym prawdopodobieństwem znajduje się prawdziwa wartość parametru



granice przedziału ufności

PRZEDZIAŁ UFNOŚCI ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ



Jerzy Neyman

PRZEDZIAŁ UFNOŚCI ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

Jak obliczyć granice przedziału ufności ?

1. Wariancja próby znana lub próba bardzo liczna

$$X_{\min} = X - z_{\alpha} S_X \qquad X_{\max} = X + z_{\alpha} S_X$$

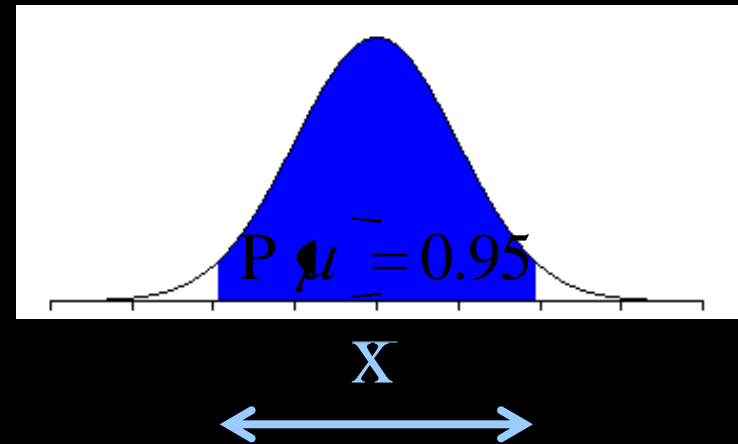
2. Wariancja próby nieznaną = obliczana na podstawie obserwacji w próbie

$$X_{\min} = X - t_{\alpha, N-1} S_X \qquad X_{\max} = X + t_{\alpha, N-1} S_X$$

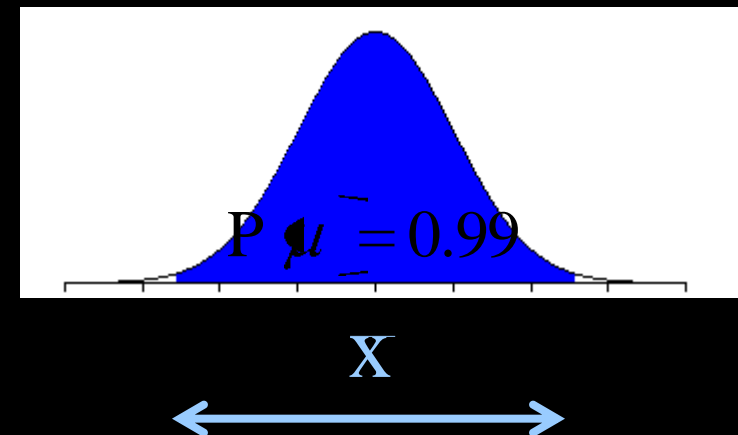
PRZEDZIAŁ UFNOŚCI ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

Prawdopodobieństwo wystąpienia prawdziwej średniej w przedziale ufności, a długość przedziału

1. Przedział ufności 95%

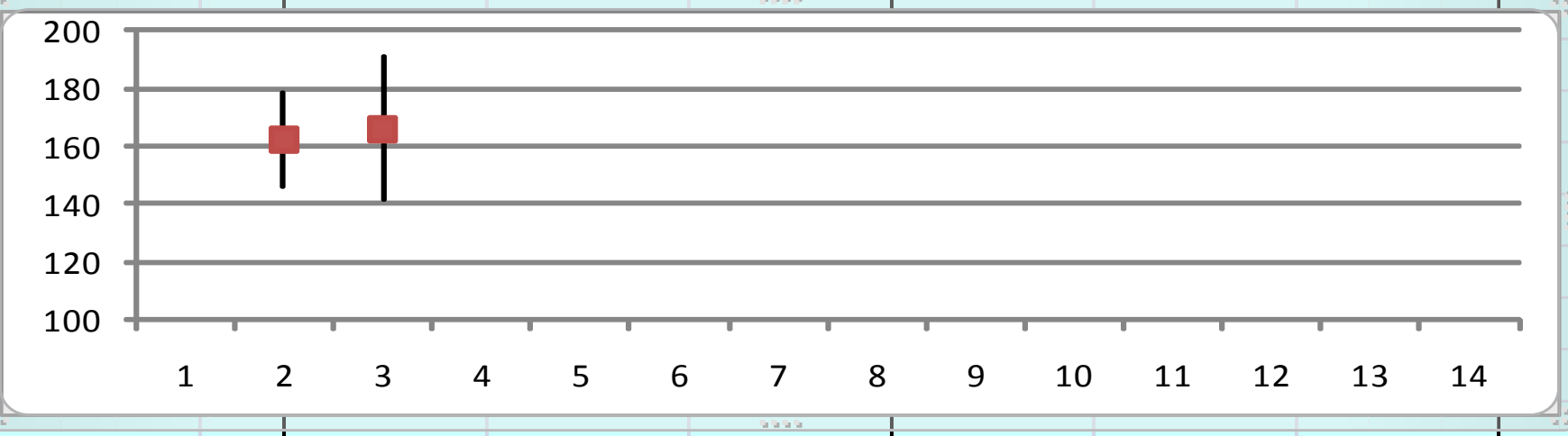
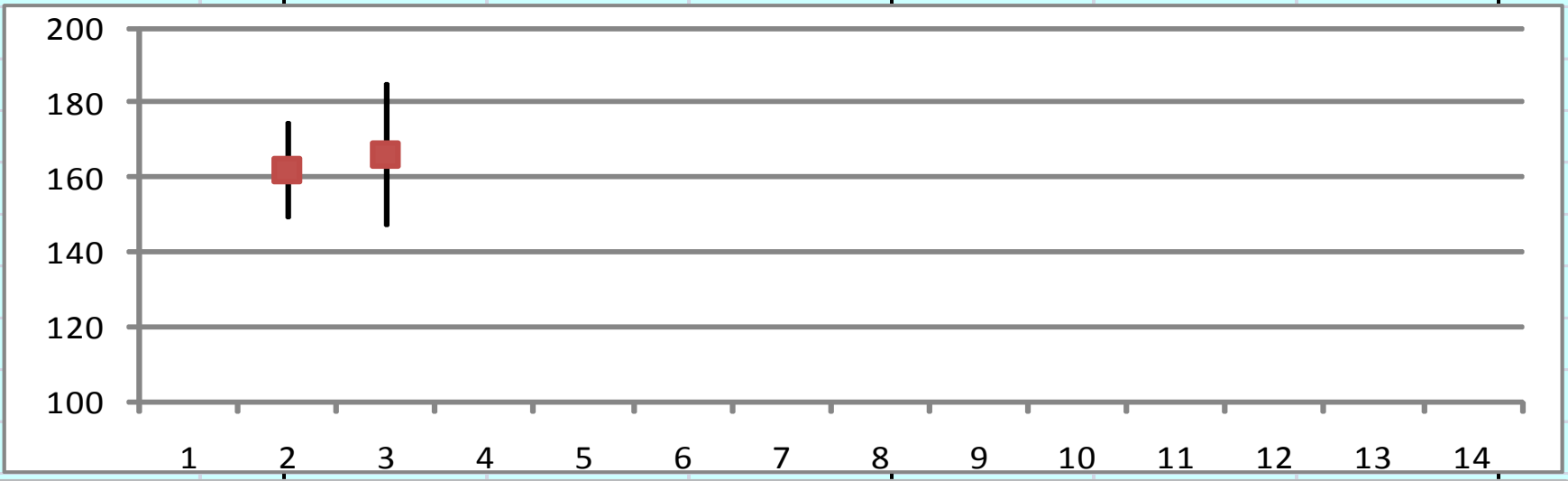


2. Przedział ufności 99%



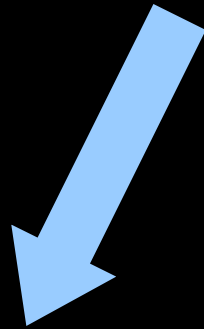
PRZEDZIAŁ UFNOŚCI ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

pr. danych		przedział 90% wariacja nie zn		przedział 95% wariacja niezna		przedział 9	
162	6.0	174.79	162	149.21	178.66	162	148.09
166	9.0	185.19	166	146.81	190.99	166	166.00



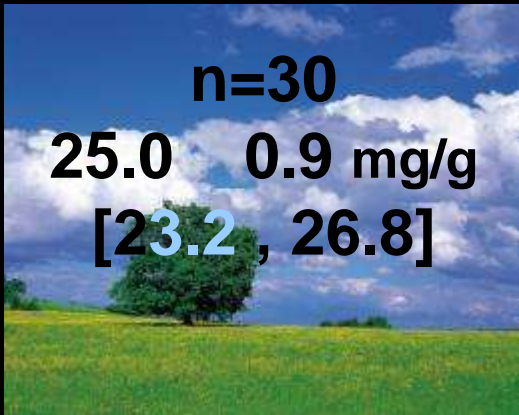
WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE

Omulek słodkowodny
Hyridella menziesi



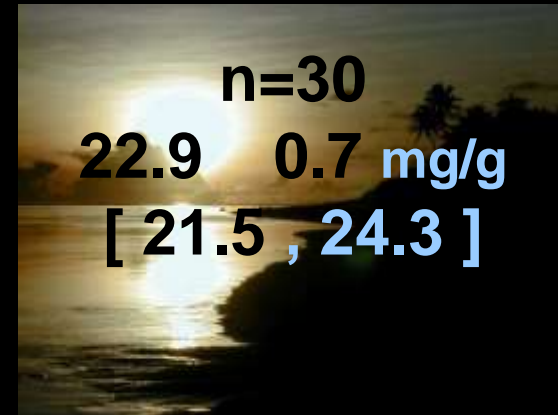
n=30

25.0 0.9 mg/g
[23.2, 26.8]

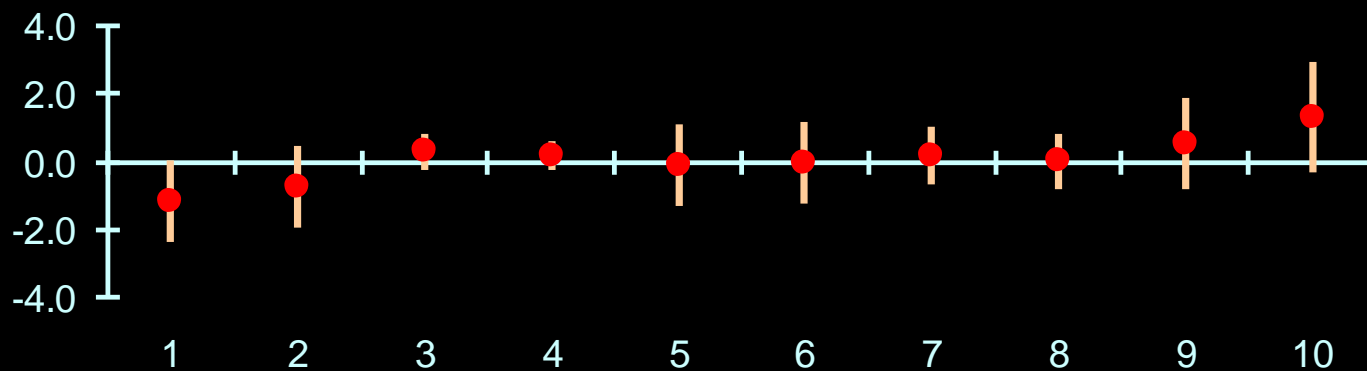
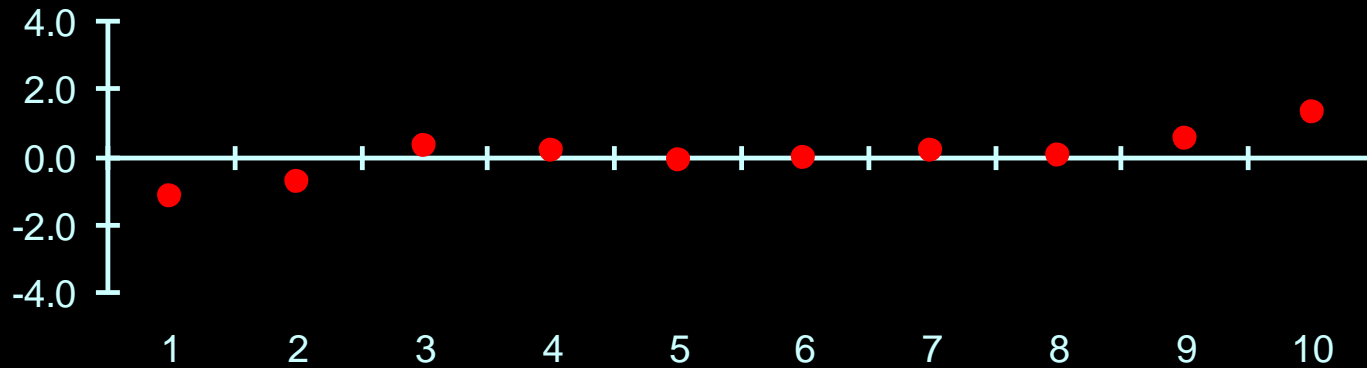


n=30

22.9 0.7 mg/g
[21.5, 24.3]



INTERPRETACJA WYKRESÓW



1. Testowanie hipotez

- **Błędy związane z testowaniem hipotez**
- **Etapy testowania hipotez**
- **Testowanie wielokrotne**

2. Estymacja parametrów

- **Błąd standardowy**
- **Przedział ufności**