

*Nie do końca zaawansowane elementy
programowania w pakiecie R*

Tomasz Suchocki





Plan wykładu

- ▶ Metody Monte Carlo
 - ▶ Jak bardzo można przybliżyć liczbę π ?
 - ▶ Całkowanie numeryczne
- ▶ R w Linuxie
- ▶ Tinn-R



Metody Monte Carlo - Definicja

- ▶ **Technika Monte Carlo** – dowolna technika używająca liczb losowych do rozwiązania problemu. Problem nie musi być natury stochastycznej!



Metody Monte Carlo - Definicja

- ▶ **Technika Monte Carlo** – dowolna technika używająca liczb losowych do rozwiązania problemu. Problem nie musi być natury stochastycznej!
- ▶ **Metoda Monte Carlo** – metoda reprezentująca rozwiązanie problemu w postaci parametru pewnej hipotetycznej populacji i używająca losowych sekwencji liczb do skonstruowania próby losowej danej populacji, z której mogą być otrzymane oszacowania statystyczne tego parametru.



Metody Monte Carlo - Definicja

- ▶ **Technika Monte Carlo** – dowolna technika używająca liczb losowych do rozwiązania problemu. Problem nie musi być natury stochastycznej!
- ▶ **Metoda Monte Carlo** – metoda reprezentująca rozwiązanie problemu w postaci parametru pewnej hipotetycznej populacji i używająca losowych sekwencji liczb do skonstruowania próby losowej danej populacji, z której mogą być otrzymane oszacowania statystyczne tego parametru.
- ▶ Nazwa "**Monte Carlo**" została wymyślona jako kryptonim dla tego typu rachunków i odpowiednich metod matematycznych.



Metody Monte Carlo - Rys historyczny

- ▶ **G. Comte de Buffon (1777)** — prawdopodobnie najwcześniejsze udokumentowane użycie próbkowania losowego do obliczenia całki.



Metody Monte Carlo - Rys historyczny

- ▶ **G. Comte de Buffon (1777)** — prawdopodobnie najwcześniejsze udokumentowane użycie próbkowania losowego do obliczenia całki.
- ▶ **Marquis Pierre-Simon de Laplace (1886)** – zastosowanie metody Buffona do wyznaczania wartości liczby π (**wielkość zupełnie nielosowa!**).



Metody Monte Carlo - Rys historyczny

- ▶ **G. Comte de Buffon (1777)** — prawdopodobnie najwcześniejsze udokumentowane użycie próbkowania losowego do obliczenia całki.
- ▶ **Marquis Pierre-Simon de Laplace (1886)** – zastosowanie metody Buffona do wyznaczania wartości liczby π (**wielkość zupełnie nielosowa!**).
- ▶ **J. von Neumann, S. Ulam, N. Metropolis, R. Feynman i in. (lata 1940-te)** – pierwsze na dużą skalę rachunki oparte o użycie liczb losowych; dotyczyły rozpraszania i absorpcji neutronów w ramach projektu “Manhattan” (**prace nad bombą jądrową w Los Alamos, USA**).



Liczba π - Definicja

- ▶ **Liczba π** – stała matematyczna równa stosunkowi długości obwodu koła do długości jego średnicy.



Liczba π - Definicja

- ▶ **Liczba π** – stała matematyczna równa stosunkowi długości obwodu koła do długości jego średnicy.
- ▶ **Liczba π** – równa polu koła o promieniu równym 1.

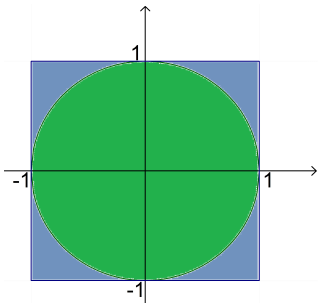


Liczba π - Definicja

- ▶ **Liczba π** – stała matematyczna równa stosunkowi długości obwodu koła do długości jego średnicy.
- ▶ **Liczba π** – równa polu koła o promieniu równym 1.
- ▶ **Liczba π** = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 ...



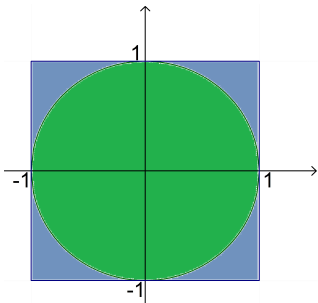
Jak wyznaczyć liczbę π - idea





Jak wyznaczyć liczbę π - idea

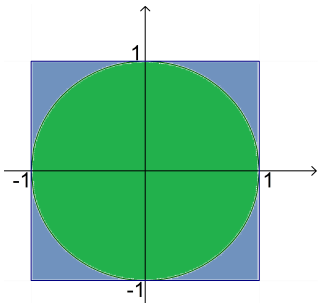
$$\frac{P_{\bigcirc}}{P_{\square}} = \frac{\pi \cdot r^2}{(2 \cdot r)^2} = \frac{\pi}{4}$$





Jak wyznaczyć liczbę π - idea

$$\frac{P_{\bigcirc}}{P_{\square}} = \frac{\pi \cdot r^2}{(2 \cdot r)^2} = \frac{\pi}{4}$$

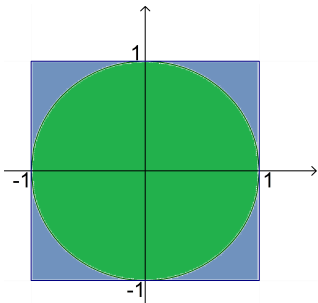


1. Ustalmy $k = 0$, $n = 0$;
2. Losujemy punkt z kwadratu;
3. Jeśli punkt będzie znajdował się wewnątrz koła zwiększymy k i n o jeden;
4. Jeśli punkt nie będzie znajdował się wewnątrz koła zwiększymy tylko n ;



Jak wyznaczyć liczbę π - idea

$$\frac{P_{\bigcirc}}{P_{\square}} = \frac{\pi \cdot r^2}{(2 \cdot r)^2} = \frac{\pi}{4}$$



1. Ustalmy $k = 0$, $n = 0$;
2. Losujemy punkt z kwadratu;
3. Jeśli punkt będzie znajdował się wewnątrz koła zwiększymy k i n o jeden;
4. Jeśli punkt nie będzie znajdował się wewnątrz koła zwiększymy tylko n ;

$$\frac{\pi}{4} = \frac{k}{n} \Rightarrow \pi = \frac{4 \cdot k}{n}$$

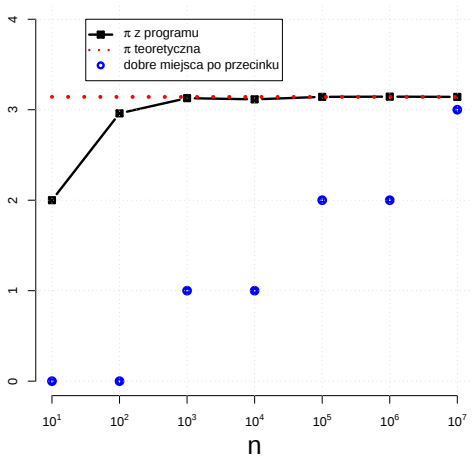


Jak wyznaczyć liczbę π - algorytm

```
1. pi_mc=function(n)
2. {
3.   k=0
4.   for (i in 1:n)
5.   {
6.     x=runif(1,-1,1)
7.     y=runif(1,-1,1)
8.     if ((x)^2+(y)^2<=1)
9.       k=k+1
10.  }
11.  return(4*k/n)
12. }
```

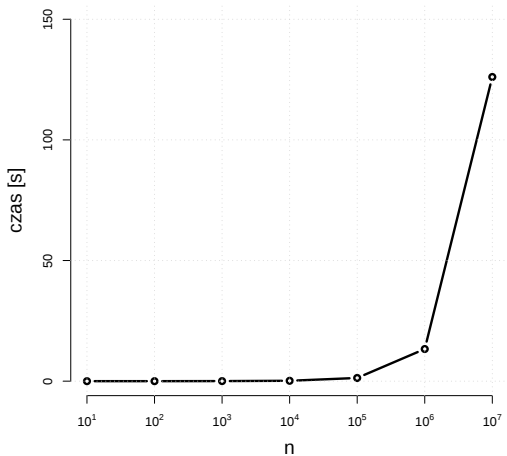


Jak wyznaczyć liczbę π - dokładność





Jak wyznaczyć liczbę π - czas obliczeń

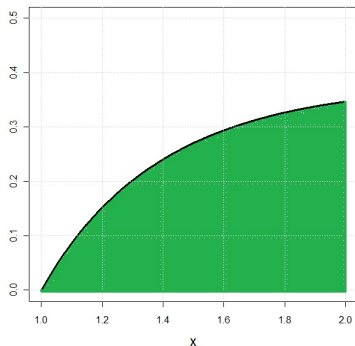




Całkowanie w pakiecie R

- ▶ Całka z funkcji f – pole powierzchni pod wykresem funkcji f .

- ▶
$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx = ?$$





Całkowanie w pakiecie R

1. Wyznaczamy prostokąt o podstawie równej przedziałowi całkowania $[A,B]$ a wysokości dowolnej byle nie mniejszej od maksimum funkcji $f(x)$ w tym przedziale;
2. Wyznaczamy przybliżoną wartość całki według następującej proporcji:
 - ▶ “stosunek pola pod krzywą (czyli całki) do pola prostokąta jest równy stosunkowi liczby punktów pod krzywą do liczby wszystkich wylosowanych punktów w tym prostokącie”.



1. Wyznaczamy prostokąt o podstawie równej przedziałowi całkowania $[A,B]$ a wysokości dowolnej byle nie mniejszej od maksimum funkcji $f(x)$ w tym przedziale;
2. Wyznaczamy przybliżoną wartość całki według następującej proporcji:
 - ▶ “stosunek pola pod krzywą (czyli całki) do pola prostokąta jest równy stosunkowi liczby punktów pod krzywą do liczby wszystkich wylosowanych punktów w tym prostokącie”.

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx = \left(\begin{matrix} \ln(x) = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right) = \\ &= \int_0^{\ln(2)} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\ln(2)} = \frac{\ln(2)^2}{2} = 0.2402265\end{aligned}$$

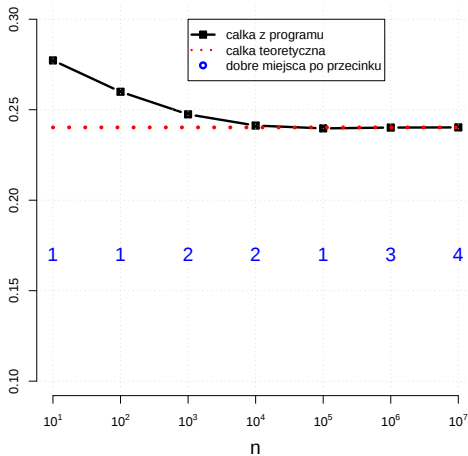


Całkowanie w pakiecie R - algorytm

```
1. calka=function(n)
2. {
3.   k=0
4.   x1=seq(1,2,length=100)
5.   f=log(x1)/x1
6.   m=max(f)
7.   for (i in 1:n)
8.   {
9.     x=runif(1,1,2)
10.    y=runif(1,0,m)
11.    if (y<=(log(x)/x))
12.      k=k+1
13.  }
14.  return(k/n*m)
15. }
```



Całkowanie w pakiecie R - wyniki





Całkowanie przy użyciu metod Monte Carlo są niezwykle przydatne w przypadku, gdy nie potrafimy w sposób **analityczny** wyznaczyć całki z pewnej funkcji.

Przykład:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



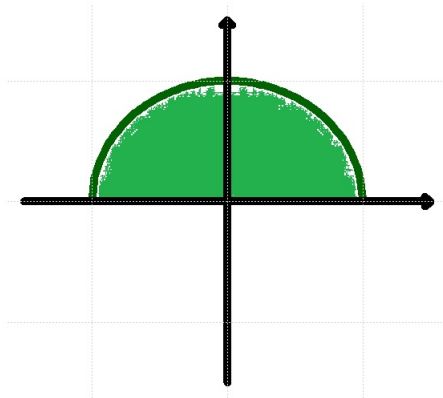
Podobieństwa powyższych metod

Czy są podobieństwa między całkowaniem, a wyznaczaniem liczby π ?

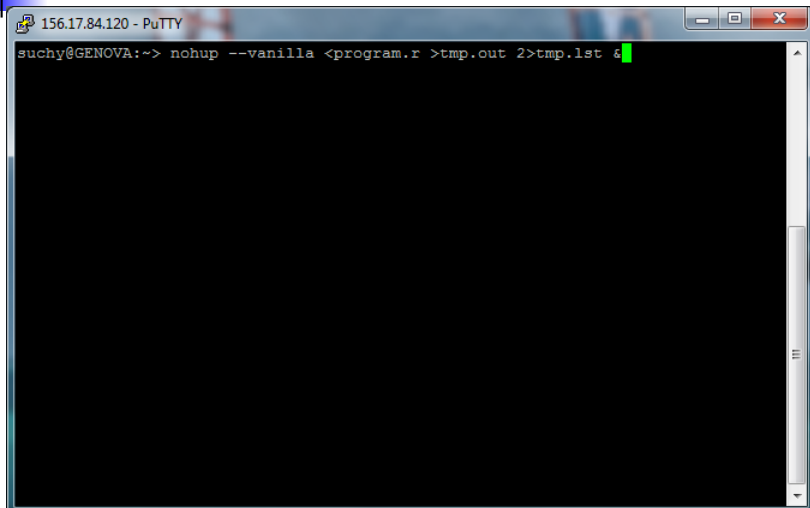


Podobieństwa powyższych metod

Czy są podobieństwa między całkowaniem, a wyznaczaniem liczby π ?



R w Linuxie – bo obliczenia trwają za długo!



A screenshot of a PuTTY terminal window. The title bar at the top reads "156.17.84.120 - PuTTY". The terminal content shows a user prompt "suchy@GENOVA:~>" followed by the command "nohup --vanilla <program.r >tmp.out 2>tmp.lst &". A green cursor is positioned at the end of the command. The terminal background is black, and the text is white. The window has standard Linux window controls (minimize, maximize, close) in the top right corner.

```
156.17.84.120 - PuTTY  
suchy@GENOVA:~> nohup --vanilla <program.r >tmp.out 2>tmp.lst &
```

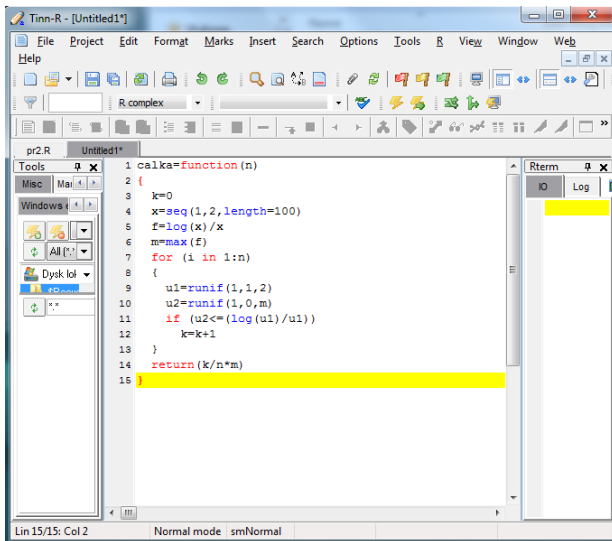
`nohup R - -vanilla <program.r >tmp.out 2>tmp.lst &`



Tinn-R – aby było wygodniej!

```
Untitled - R Editor
calka=function(n)
{
  k=0
  x=seq(1,2,length=100)
  f=log(x)/x
  m=max(f)
  for (i in 1:n)
  {
    u1=runif(1,1,2)
    u2=runif(1,0,m)
    if (u2<=(log(u1)/u1))
      k=k+1
  }
  return(k/n*m)
}
```

Tinn-R – aby było wygodniej!





Koniec

Dziękuję za uwagę



Bibliografia

Wykłady dr hab. Wiesława Płaczka, UJ