analiza danych

1. Wykład wstępny
2. **Elementy algebry liniowej**
3. Wybrane aspekty obliczeń komputerowych
4. Architektura pojedynczej sieci neuronowej cz.1
5. Architektura pojedynczej sieci neuronowej cz. 2
6. Architektura modelu uczenia głębokiego - wprowadzenie
7. Architektura modelu uczenia głębokiego – rozszerzenia
8. Walidacja modelu
9. Przykłady innych struktur sieci
10. Przykłady własnych badań cz. 1
11. Przykłady własnych badań cz. 2

12. -15. Prezentacje zaliczeniowe

1. **Macierze i operacje na macierzach – po co?**
2. Podstawowe operacja na macierzach
3. Przykłady typowych struktur macierzy
4. Odwracanie macierzy
5. Wybrane operatory macierzowe

Macierze i operacje na macierzach – po co?

- Surowe dane – forma tabel → macierz 2D
- Danej wejściowe dla biblioteki *keras* → macierz XD = tensor
- Operacje związane z dopasowywaniem modeli uczenia głębokiego, np. estymacja wag w sieciach → operacje na macierzach

```
# Constructed from biom file
#OTU ID  S8.4.Gut.S8 S8.5.Gut.S8 S8.2.Gut.S8 S8.3.Gut.S8
d__Bacteria;p__Proteobacteria;c__Gammaproteobacteria;o__Aeromonadales;f__Aeromonadaceae  13353.0  12078.0  17717.0  18658.0
d__Bacteria;p__Firmicutes;c__Bacilli;o__Lactobacillales;f__Streptococcaceae   1438.0   3342.0   1707.0   3280.0
d__Bacteria;p__Proteobacteria;c__Gammaproteobacteria;o__Aeromonadales;__   193.0 9.0   90.0  19.0
d__Bacteria;p__Firmicutes;c__Clostridia;o__Clostridiales;f__Clostridiaceae 183.0 1.0   36.0  2.0
d__Bacteria;p__Firmicutes;c__Bacilli;o__Erysipelotrichales;f__Erysipelotrichaceae   112.0 219.0 173.0 414.0
d__Bacteria;p__Proteobacteria;c__Gammaproteobacteria;o__Burkholderiales;f__Rhodocyclaceae   148.0 26.0  35.0  17.0
d__Bacteria;p__Fusobacteriota;c__Fusobacteriia;o__Fusobacteriales;f__Fusobacteriaceae 94.0  33.0  69.0  24.0
```

Macierze i operacje na macierzach – po co?

- Skalar $\rightarrow x$
- Wektor $\rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$
- Macierz $\rightarrow \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$
- Tensor = macierz (wielowymiarowa) $\rightarrow \mathbf{X}, x_{ijk}$

1. Macierze i operacje na macierzach – po co?
2. **Podstawowe operacja na macierzach**
3. Przykłady typowych struktur macierzy
4. Odwracanie macierzy
5. Wybrane operatory macierzowe

Podstawowe operacja na macierzach

- Dodawanie $\rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \quad x_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Broadcasting (DL only) $\rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{b} \quad x_{ij} = a_{ij} + b_j$

  dodanie wektora do każdej kolumny
- Operacje z użyciem skalarów $\rightarrow \boldsymbol{X} = b \cdot \boldsymbol{A} + c \quad x_{ij} = b \cdot a_{ij} + c$
- Transpozycja wektora $\rightarrow \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{x}' = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]$
- Transpozycja macierzy $\rightarrow \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix} \quad x_{ij}^T = x_{ji}$$

Podstawowe operacja na macierzach

- Mnożenie, dot product → $\boldsymbol{XZ}$ → $\boldsymbol{X}_{(n,p)}\boldsymbol{Z}_{(p,m)}$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix}$$

Podstawowe operacja na macierzach

- Mnożenie, dot product $\rightarrow \boldsymbol{XZ} \quad \rightarrow \boldsymbol{X}_{(n,p)}\boldsymbol{Z}_{(p,m)}$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}z_{11} + x_{12}z_{21} & . & . \\ ? & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix}$$

Podstawowe operacja na macierzach

- Mnożenie, dot product → $\boldsymbol{XZ}$ → $\boldsymbol{X}_{(n,p)}\boldsymbol{Z}_{(p,m)}$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}z_{11} + x_{12}z_{21} & . & . \\ x_{21}z_{11} + x_{22}z_{21} & . & . \\ . & . & ? \end{bmatrix}$$

Podstawowe operacja na macierzach

- Mnożenie, dot product → $\boldsymbol{XZ}$ → $\boldsymbol{X}_{(n,p)}\boldsymbol{Z}_{(p,m)}$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}z_{11} + x_{12}z_{21} & . & . \\ x_{21}z_{11} + x_{22}z_{21} & . & . \\ . & . & x_{31}z_{13} + x_{32}z_{23} \end{bmatrix}$$

- Hadamard product → $\boldsymbol{X} \odot \boldsymbol{W}$ → $\begin{bmatrix} x_{11}w_{11} & . \\ x_{21}w_{21} & . \\ . & . \end{bmatrix}$

- Kronecker product → $\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{G}$ → $= \begin{bmatrix} x_{11}\boldsymbol{G} & x_{12}\boldsymbol{G} \\ x_{21}\boldsymbol{G} & x_{22}\boldsymbol{G} \\ x_{31}\boldsymbol{G} & x_{32}\boldsymbol{G} \end{bmatrix}$

1. Macierze i operacje na macierzach – po co?
2. Podstawowe operacja na macierzach
3. **Przykłady typowych struktur macierzy**
4. Odwracanie macierzy
5. Wybrane operatory macierzowe

Przykłady typowych struktur macierzy

- Macierz kwadratowa *n=m* → $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$

- Macierz diagonalna → $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} \end{bmatrix}$

- Macierz blokowo-diagonalna → $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$

- Macierz jednostkowa → $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Przykłady typowych struktur macierzy

- Macierz gęsta (dense)

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & 0 & x & 0 & x \\ x & 0 & x & x & x & x \\ x & 0 & x & x & x & 0 \\ x & x & x & 0 & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

- Macierz rzadka (sparse)

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

1. Macierze i operacje na macierzach – po co?
2. Podstawowe operacja na macierzach
3. Przykłady typowych struktur macierzy
4. **Odwracanie macierzy**
5. Wybrane operatory macierzowe

Odwracanie macierzy

- $\boldsymbol{M^{-1}}$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{M^{-1}M = I = MM^{-1}}$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{(MN)^{-1} = M^{-1}N^{-1}}$

- Macierze odwracalne
  - kwadratowe
  - dodatnio określone (positive definite)
    - Nieujemne wszystkie wartości własne (eigenvalues)
    - Niezerowy wyznacznik (determinant)
    - Pełnego rzędu (full rank)

Odwracanie macierzy

- Wyznacznik
  - skalar
  - det($\boldsymbol{M}$), | $\boldsymbol{M}$ |
  - zdefiniowany tylko dla macierzy kwadratowych
  - rząd macierzy → maksymalna liczba wierszy / kolumn dla których $|\boldsymbol{M}| \neq 0$

$$|\boldsymbol{M}| = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

Odwracanie macierzy

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^{-\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{1}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}$$

Odwracanie macierzy

- Szczególne przypadki
  - Macierz diagonalna

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

  - Macierz blokowo-diagonalna

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & & & & \\ m_{12} & m_{22} & & & & \\ & & m_{33} & m_{34} & & \\ & & m_{34} & m_{44} & & \\ & & & & m_{55} & m_{56} \\ & & & & m_{56} & m_{66} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M^{-1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{m}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{m}_3^{-1} \end{bmatrix}$$

Odwracanie macierzy

- Macierze **nie**odwracalne
  - macierz osobliwa (singular, non-positive definite, non-full rank)
    - $|\boldsymbol{M}| = 0$
    - $|\boldsymbol{M}| \neq 0$ tylko dla podzbioru macierzy
    - Macierz niepełnego rzędu
- Uogólniona odwrotność
- Generalised inverse
- Moore – Penrose **pseudo**inverse
- $\boldsymbol{M}^{-}$
- Dla danej macierzy $\boldsymbol{M}$ istnieje kilka $\boldsymbol{M}^{-}$

Odwracanie macierzy

- Uogólniona odwrotność
- Uzyskanie macierzy odwrotnej:
  - Wyznaczyć **sub**macierz $\boldsymbol{B}$ pełnego rzędu
  - Wyzerować wszystkie elementy macierzy $\boldsymbol{M}$
  - Odwrócić macierz $\boldsymbol{B}$
  - Uzupełnić korespondujące elementy $\boldsymbol{M}$ przez $\boldsymbol{B}^{-1}$

Odwracanie macierzy

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^{-} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Macierze i operacje na macierzach – po co?
2. Podstawowe operacja na macierzach
3. Przykłady typowych struktur macierzy
4. Odwracanie macierzy
5. **Wybrane operatory macierzowe**

Operatory macierzowe

- Ślad (trace)
- $Tr(\boldsymbol{M}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Operatory macierzowe

- Norma (norm)

- Norma wektora $||\boldsymbol{x}||_{\boldsymbol{p}}$
  - Definicja → $||\boldsymbol{x}||_{\boldsymbol{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$
  - L1 norm, L1 regularisation, Lasso → $||\boldsymbol{x}||_{\boldsymbol{1}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
  - L2 norm^2, L2 regularisation, Ridge → $||\boldsymbol{x}||_{2}^{\mathbf{2}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$
  - L∞ norm → $||\boldsymbol{x}||_{\infty} = \max_{\boldsymbol{i}} |x_i|$

- Macierz
  - L1 norm → $||\boldsymbol{X}||_{\boldsymbol{1}} = \max_{\boldsymbol{j}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i| \right)$
  - L∞ norm → $||\boldsymbol{X}||_{\infty} = \max_{\boldsymbol{i}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i| \right)$

1. Macierze i operacje na macierzach – po co?
2. Podstawowe operacja na macierzach
3. Przykłady typowych struktur macierzy
4. Odwracanie macierzy
5. Wybrane operatory macierzowe

1. Proszę podać przykład macierzy której nie można odwrócić.
2. Co wtedy?
3. Jaki jest wynik mnożenia **Xz** → $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$?
4. $\mathrm{Tr}(\mathbf{X}) = ?$