Zaawansowane aspekty praktycznego zastosowania modeli mieszanych

1. Wykład wstępny
2. Algebra macierzowa
3. Best Linear Unbiased Prediction (BLUP): model jednocechowy z pojedynczym efektem losowym
4. Best Linear Unbiased Prediction (BLUP): model wielocechowy
5. Metody redukcji wymiarów modeli wielocechowych BLUP

6. Analiza danych powtarzalnych w czasie

7. Predykcja genomowej wartości hodowlanej
8. Model jednostopniowy
9. Estymacja parametrów modelu
10. - 15. Prezentacje zaliczeniowe

1. Dane powtarzalne w czasie
2. Model regresji stałej
3. Model regresji losowej

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Dane powtarzalne w czasie

Dane powtarzalne w czasie

- Próbne udoje (*test day records*)
  - Rutynowa kontrola użytkowości w stadach krów mlecznych
  - Średnio raz w miesiącu
  - Wydajność mleka, tłuszczu, białka + SCC
- DIM (*days in milk*)
  - Liczba dni pomiędzy początkiem laktacji, a próbnym udojem

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Dane powtarzalne w czasie

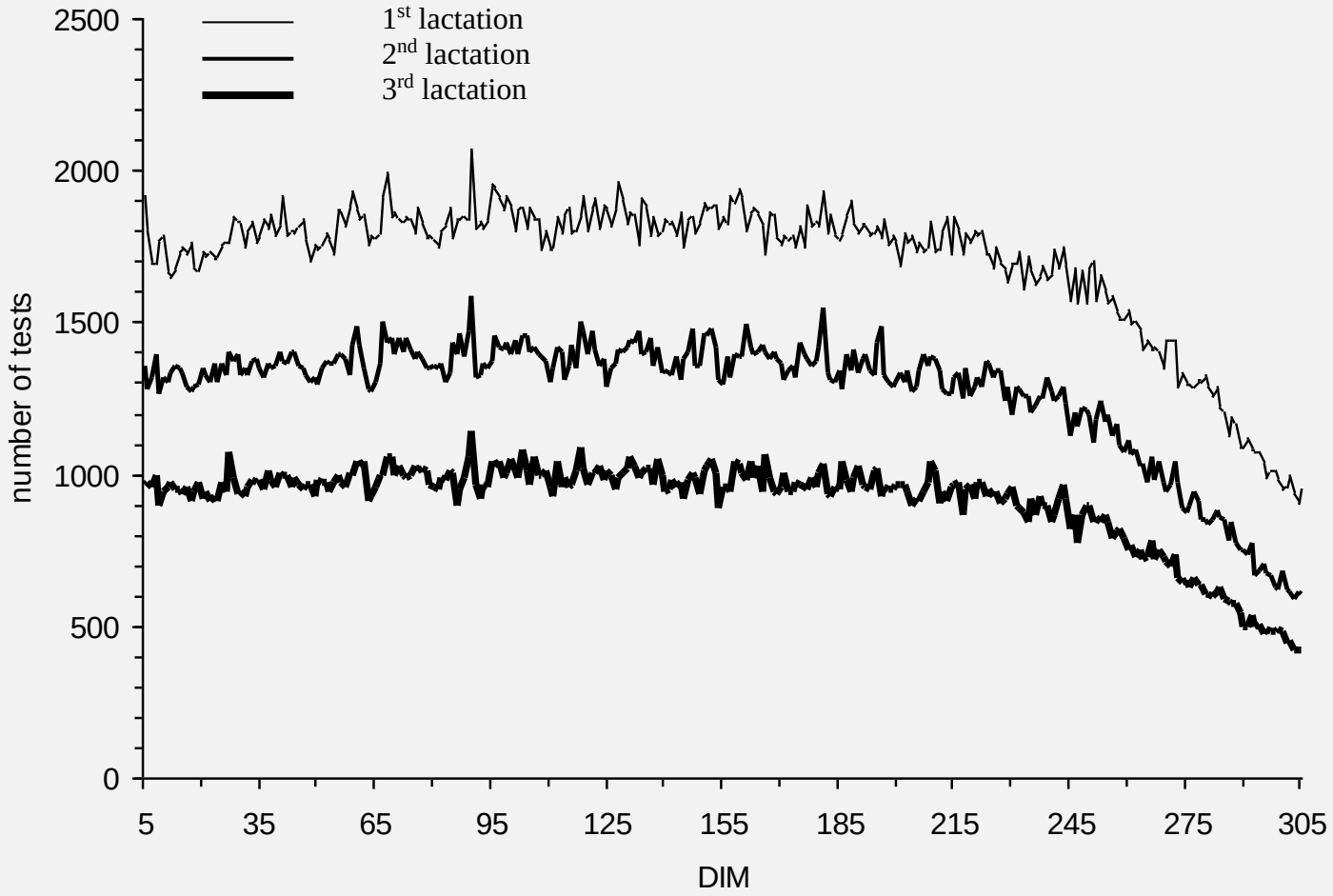
- Laktacja 305-cio dniowa
  - Wydajności próbnych udojów przeliczone na standardową 305-cio dniową wydajność
  - Wydajność krowy w laktacji wyrażona 1 liczbą

- Problemy w modelowaniu statystycznym
  - Zmiany wartości efektów stałych w czasie laktacji np. stado
  - Osobniki z niezakończonymi laktacjami
  - Zmienne wartości parametrów genetycznych w czasie trwania laktacji

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Dane powtarzalne w czasie

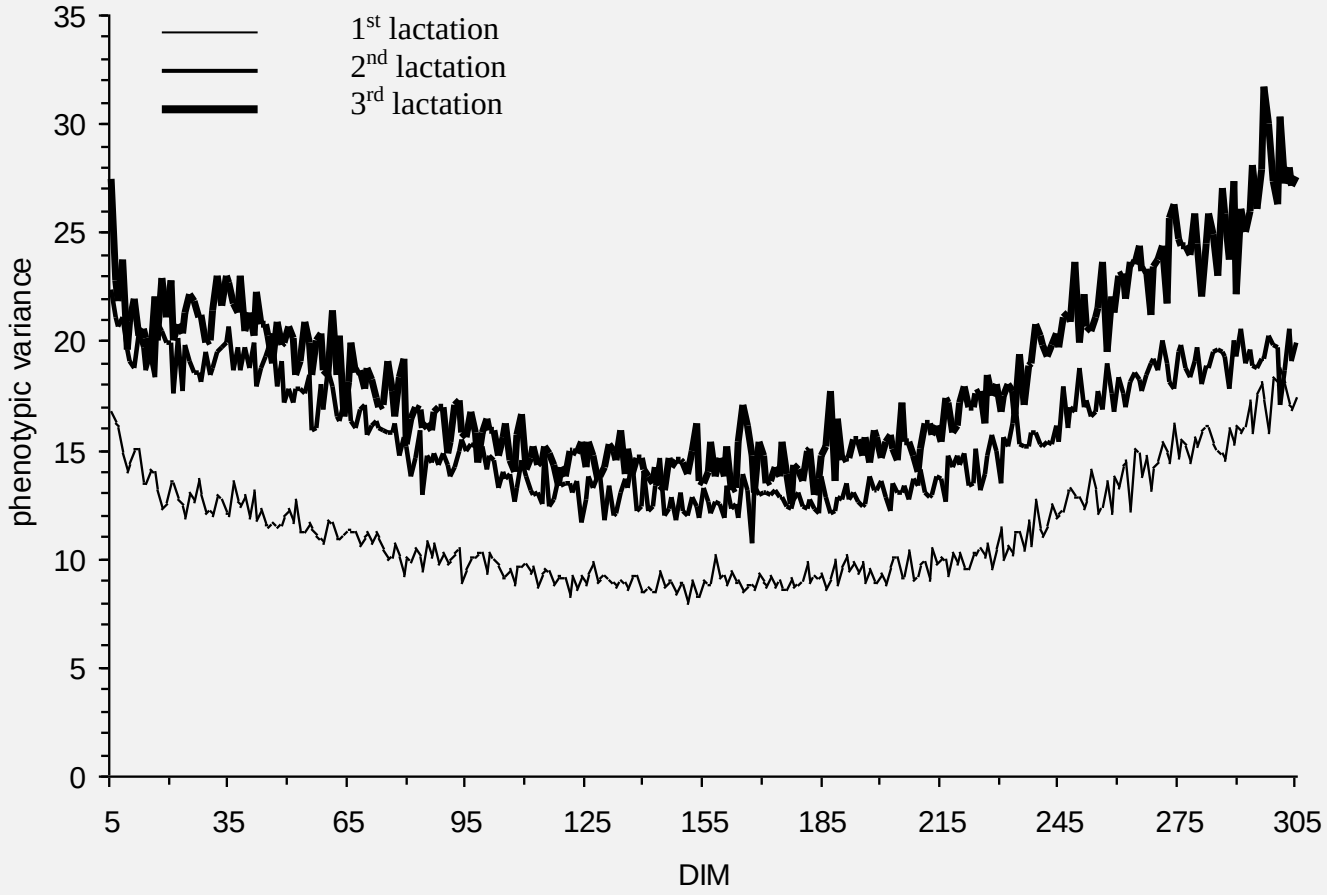
- Liczba próbnych udojów w ciągu laktacji



Copyright ©2020, Joanna Szyda

Dane powtarzalne w czasie

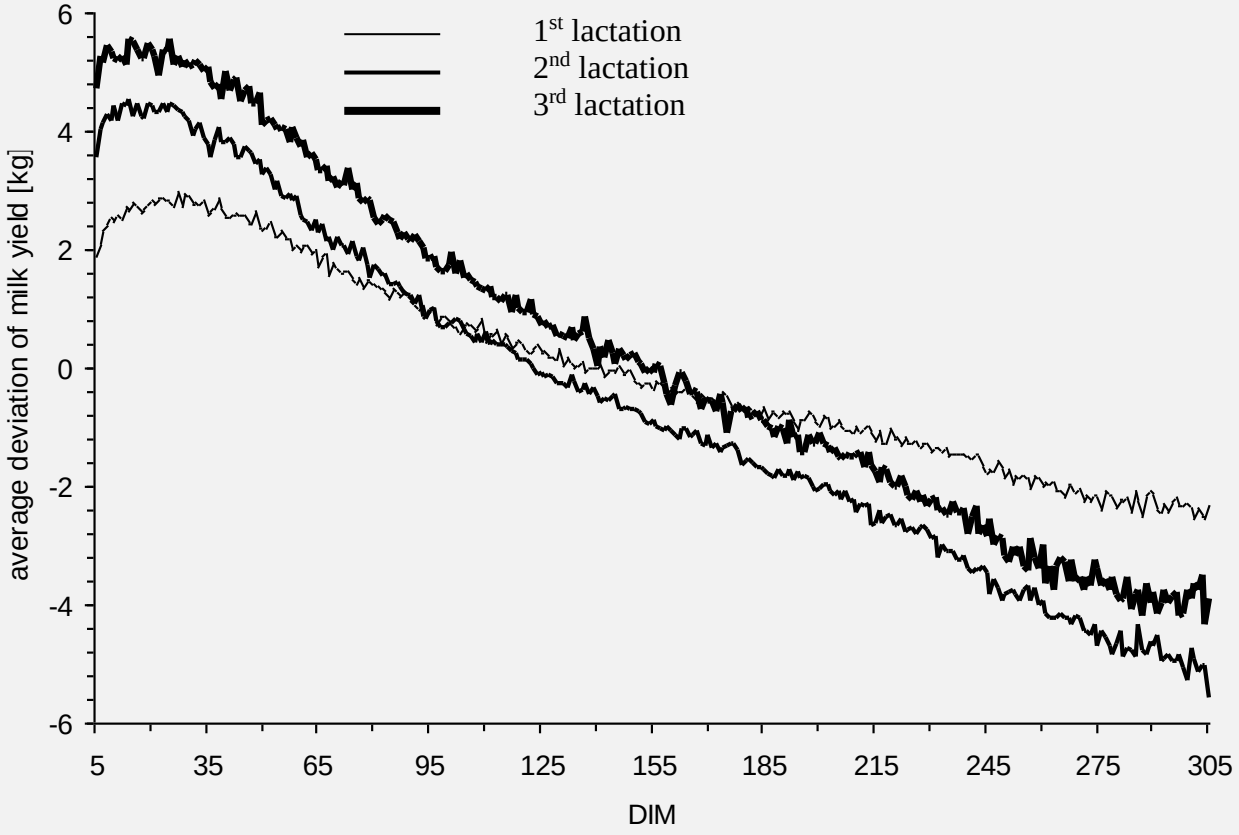
- Wariancja fenotypowa próbnych udojów



Copyright ©2020, Joanna Szyda

Dane powtarzalne w czasie

- Odchylenie wydajności próbnego udoju osobnika od średniej dla grupy stado-dzień_testu-laktacja



Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej

Model regresji stałej

- **Ptak** and Schaeffer (1993)
- Modelowanie przebiegu całej laktacji
- Wykorzystanie informacji o kowariancji pomiędzy poszczególnymi próbnymi udojami
- Grupy krów = grupy efektów stałych → odrębne krzywe laktacji

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej

KATEDRA GENETYKI, HODOWLI I ETOLOGII ZWIERZĄT

Katedra Genetyki, Hodowli i Etologii Zwierząt
Wydział Hodowli i Biologii Zwierząt
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Pracownicy na

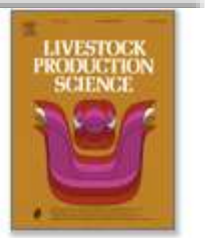
prof. dr hab. Ewa Pta
Kierownik

rzptak@cyf-kr.edu.pl

ELSEVIER

Livestock Production Science

Volume 34, Issues 1–2, March 1993, Pages 23-34



Use of test day yields for genetic evaluation of dairy sires and cows

Ewa Ptak, L.R. Schaeffer

Show more

+ Add to Mendeley Share Cite

https://doi.org/10.1016/0301-6226(93)90033-E Get rights and content

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2022, Joanna Szyda

Model regresji stałej – model

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk}\,\beta_k + u_j + pe_j + e_{tij}$$

- y_{tij} wydajność próbnego udoju *t* krowy *j* w *i*-tej klasie htd
- htd_i *i*-ta klasa stado-próbny_udój
- *NF* stopień wielomianu Legendre'a dla efektów stałych
- β_k *k*-ty współczynnik regresji (efekt stały)
- φ_{tjk} *k*-ty współczynnik wielomianu Legendre'a dla krowy *j*
- u_j efekt addytywnie genetyczny osobnika *j*
- pe_j efekt trwały środowiskowy osobnika *j*
- e_{tij} błąd dla rekordu *t* krowy *j* w *i*-tej klasie htd

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – model

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk}\,\beta_k + u_j + pe_j + e_{tij}$$

- y_{tij} wydajność próbnego udoju *t* krowy *j* w *i*-tej klasie htd
- htd_i *i*-ta klasa stado-próbny_udój
- *NF* stopień wielomianu Legendre'a dla efektów stałych
- β_k *k*-ty współczynnik regresji (efekt stały)
- φ_{tjk} *k*-ty współczynnik wielomianu Legendre'a dla krowy *j*
- u_j efekt addytywnie genetyczny osobnika *j*
- pe_j efekt trwały środowiskowy osobnika *j*
- e_{tij} błąd dla rekordu *t* krowy *j* w *i*-tej klasie htd

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – Lagendra'e polynomials

Współczynniki wielomianu Legendre'a:

$$\varphi_t = \varphi(t) = \varphi(DIM^*)$$

$$DIM^* = -1 + 2\frac{DIM - DIM_{min}}{DIM_{max} - DIM_{min}}$$

- dla k=0 $\varphi(t) = 1$
- dla k=1 $\varphi(t) = DIM^*$
- dla k=2 $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(3DIM^{*2} - 1\right)$
- dla k=3 $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(5DIM^{*3} - 3DIM^*\right)$
- dla k=4 $\varphi(t) = \frac{1}{8}\left(35DIM^{*4} - 30DIM^{*2} + 3\right)$

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – model

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk}\,\beta_k + u_j + pe_j + e_{tij}$$

- y_{tij} wydajność próbnego udoju *t* krowy *j* w *i*-tej klasie htd
- htd_i *i*-ta klasa stado-próbny_udój
- *NF* stopień wielomianu Legendre'a dla efektów stałych
- β_k *k*-ty współczynnik regresji (efekt stały)
- φ_{tjk} *k*-ty współczynnik wielomianu Legendre'a dla krowy *j*
- u_j efekt addytywnie genetyczny osobnika *j*
- pe_j efekt trwały środowiskowy osobnika *j*
- e_{tij} błąd dla rekordu *t* krowy *j* w *i*-tej klasie htd

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – model

Efekt trwały środowiskowy

- *permanent environmental effect*
- Efekt nie-genetyczny osobnika
- Wpływ środowiska na powtarzalne wydajności osobnika np. na poszczególne próbne udoje

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – model

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk}\,\beta_k + u_j + pe_j + e_{tij}$$

- y_{tij} wydajność próbnego udoju *t* krowy *j* w *i*-tej klasie htd
- htd_i *i*-ta klasa stado-próbny_udój
- *NF* stopień wielomianu Legendre'a dla efektów stałych
- β_k *k*-ty współczynnik regresji (efekt stały)
- φ_{tjk} *k*-ty współczynnik wielomianu Legendre'a
- u_j efekt addytywnie genetyczny osobnika *j*
- pe_j efekt trwały środowiskowy osobnika *j*
- e_{tij} błąd dla rekordu *t* krowy *j* w *i*-tej klasie htd

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – struktura kowariancji

- $var(u_j) = A\sigma_u^2$
- $var(pe_j) = I\sigma_{pe}^2$
- $var(e_{tij}) = I\sigma_e^2$

Identyczna struktura kowariancji?

Różne wymiary wektorów $\boldsymbol{pe}$ i $\boldsymbol{e}$, różne macierze wystąpień

- $\boldsymbol{pe}$ liczba krów x 1
- $\boldsymbol{e}$ liczba próbnych udojów x 1

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – struktura kowariancji

Macierz kowariancji fenotypowych próbnych udojów dla jednej krowy

$$V_y = \begin{bmatrix} \sigma^2 & r\,\sigma^2 & r\,\sigma^2 & \cdots & r\,\sigma^2 \\ & \sigma^2 & r\,\sigma^2 & \cdots & r\,\sigma^2 \\ & & & \cdots & \cdots \\ & symm. & & \sigma^2 & r\,\sigma^2 \\ & & & & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

- Wariancja próbnego udoju: $\sigma_{yi}^2 = \sigma_u^2 + \sigma_{pe}^2 + \sigma_e^2$
- Korelacja pomiędzy próbnymi udojami udojami *i* oraz *j*: $r_{ij} = \frac{\sigma_u^2 + \sigma_{pe}^2}{\sqrt{\sigma_{yi}^2 \sigma_{yj}^2}}$

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright © 2022, Joanna Szyda

Model regresji stałej

- Model

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Xb} + \boldsymbol{Qu} + \boldsymbol{Zpe} + \boldsymbol{e}$$

- MME

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\dfrac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2} & \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} + \dfrac{\sigma_e^2}{\sigma_{pe}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{pe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Xb} + \boldsymbol{Qu} + \boldsymbol{Zpe} + \boldsymbol{e}$$

$$\boldsymbol{Xb} = \boldsymbol{X_1 b_1} + \boldsymbol{X_2 b_2}$$

standardowe efekty stałe np. htd

współczynniki wielomianów Legendra

- Wymiary:

$\boldsymbol{X_1} = N_{tds} \text{ x } N_{htd}$ → macierz wystąpień $\boldsymbol{X_1} \in \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$

$\boldsymbol{X_2} = N_{tds} \text{ x } NF$ → macierz eksperymentu $\boldsymbol{X_2} \in \{\varphi_{tjk}\}$

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej - dane

	Animals									
	4		5		6		7		8	
DIM	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY
4	1	17.0	1	23.0	6	10.4	4	22.8	1	22.2
38	2	18.6	2	21.0	7	12.3	5	22.4	2	20.0
72	3	24.0	3	18.0	8	13.2	6	21.4	3	21.0
106	4	20.0	4	17.0	9	11.6	7	18.8	4	23.0
140	5	20.0	5	16.2	10	8.4	8	18.3	5	16.8
174	6	15.6	6	14.0			9	16.2	6	11.0
208	7	16.0	7	14.2			10	15.0	7	13.0
242	8	13.0	8	13.4					8	17.0
276	9	8.2	9	11.8					9	13.0
310	10	8.0	10	11.4					10	12.6

DIM, days in milk; HTD, herd–test–day.

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – macierz wystąpień współczynników wielomianu

	Animals									
	4		5		6		7		8	
DIM	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY
4	1	17.0	1	23.0	6	10.4	4	22.8	1	22.2
38	2	18.6	2	21.0	7	12.3	5	22.4	2	20.0
72	3	24.0	3	18.0	8	13.2	6	21.4	3	21.0
106	4	20.0	4	17.0	9	11.6	7	18.8	4	23.0
140	5	20.0	5	16.2	10	8.4	8	18.3	5	16.8
174	6	15.6	6	14.0			9	16.2	6	11.0
208	7	16.0	7	14.2			10	15.0	7	13.0
242	8	13.0	8	13.4					8	17.0
276	9	8.2	9	11.8					9	13.0
310	10	8.0	10	11.4					10	12.6

DIM, days in milk; HTD, herd–test–day.

$$\boldsymbol{X_2} = N_{tds} \text{ x } NF$$

dla k=0 $\varphi(t) = 1$

dla k=1 $\varphi(t) = DIM^*$

dla k=2 $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(3DIM^{*2} - 1\right)$

dla k=3 $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(5DIM^{*3} - 3DIM^*\right)$

dla k=4 $\varphi(t) = \frac{1}{8}\left(35DIM^{*4} - 30DIM^{*2} + 3\right)$

Unormowane współczynniki $\varphi(DIM^*)$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{1/2}\,\varphi_0 & \sqrt{3/2}\,\varphi_1 & \sqrt{5/2}\,\varphi_2 & \sqrt{7/2}\,\varphi_3 & \sqrt{9/2}\,\varphi_4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0.7071 & -1.2247 & 1.5811 & -1.8704 & 2.1213 \\ 0.7071 & -0.9525 & 0.6441 & -0.0176 & -0.6205 \\ 0.7071 & -0.6804 & -0.0586 & 0.7573 & -0.7757 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.7071 & 0.6804 & -0.0586 & -0.7573 & -0.7757 \\ 0.7071 & 0.9525 & 0.6441 & 0.0176 & -0.6205 \\ 0.7071 & 1.2247 & 1.5811 & 1.8704 & 2.1213 \end{bmatrix}$$

krowa 4; próbny udój dla DIM=4

krowa 4; próbny udój dla DIM=38

krowa 4; próbny udój dla DIM=72

krowa 8; próbny udój dla DIM=242

krowa 8; próbny udój dla DIM=276

krowa 8; próbny udój dla DIM=310

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – macierz wystąpień efektu **u**

	Animals									
	4		5		6		7		8	
DIM	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY
4	1	17.0	1	23.0	6	10.4	4	22.8	1	22.2
38	2	18.6	2	21.0	7	12.3	5	22.4	2	20.0
72	3	24.0	3	18.0	8	13.2	6	21.4	3	21.0
106	4	20.0	4	17.0	9	11.6	7	18.8	4	23.0
140	5	20.0	5	16.2	10	8.4	8	18.3	5	16.8
174	6	15.6	6	14.0			9	16.2	6	11.0
208	7	16.0	7	14.2			10	15.0	7	13.0
242	8	13.0	8	13.4					8	17.0
276	9	8.2	9	11.8					9	13.0
310	10	8.0	10	11.4					10	12.6

DIM, days in milk; HTD, herd–test–day.

$$\boldsymbol{Q} = N_{tds} \text{ x } N_{cows}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{q}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{q}_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{q}_7 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{q}_8 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{q}_i$ wektor „1” dla pr. udojów osobnika i

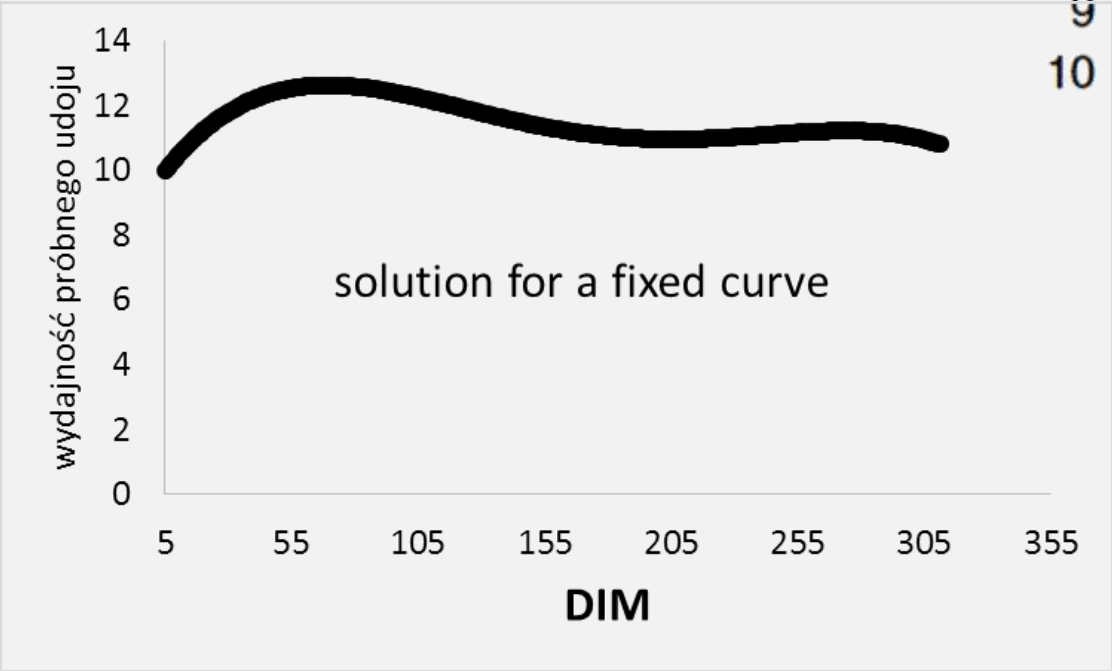
R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

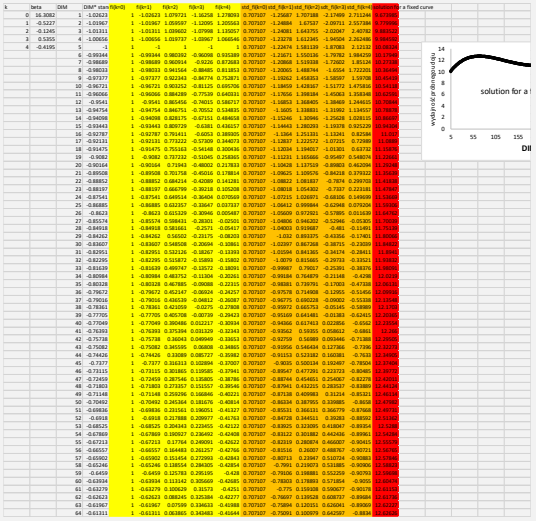
Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – rozwiązania efektów stałych

Fixed regression coefficients	
1	16.3082
2	–0.5227
3	–0.1245
4	0.5355
5	–0.4195

Herd–test–day	
1	10.9783
2	7.9951
3	8.7031
4	8.2806
5	6.3813
6	3.1893
7	3.3099
8	3.3897
9	0.6751
10	0.0000





R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – rozwiązania efektów losowych

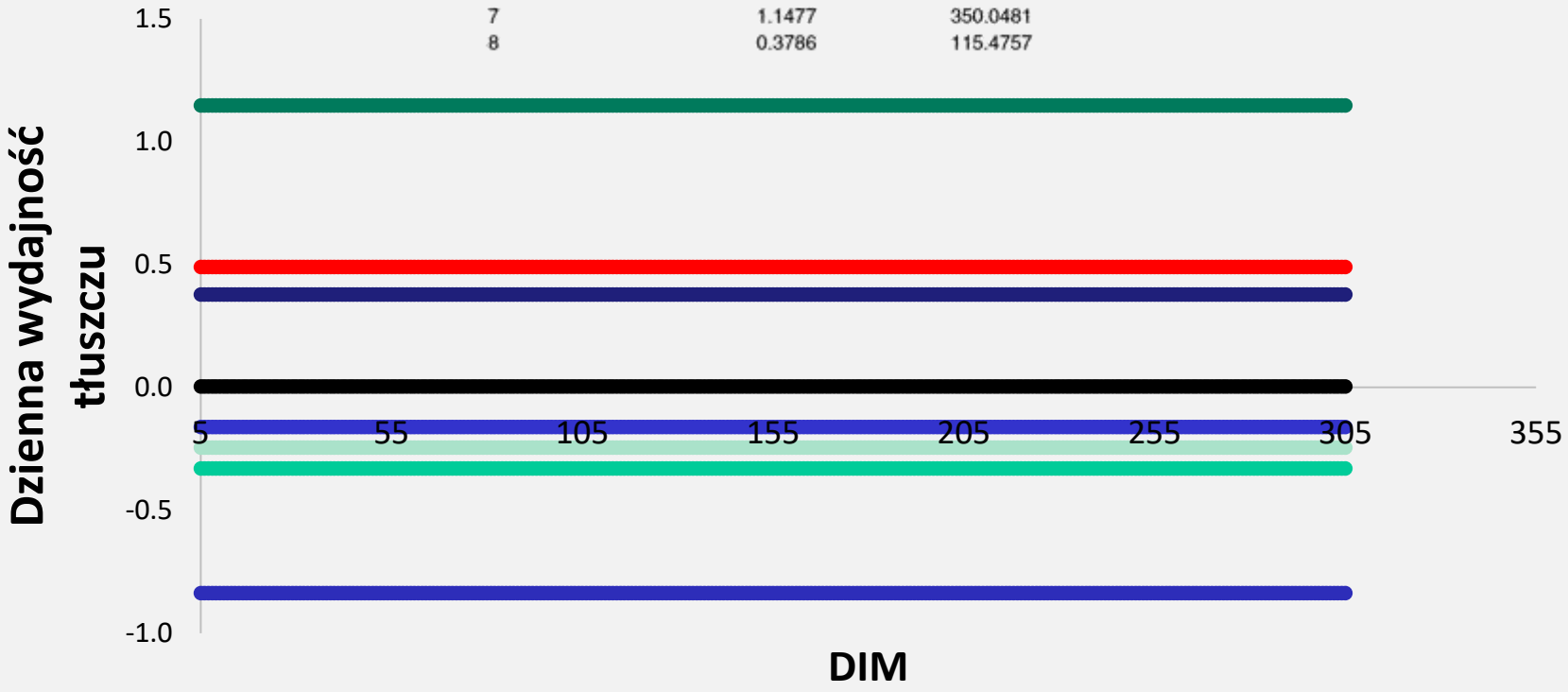
	EBV for daily yield	EBV for 305-day yield
Animal effect		
1	–0.3300	–100.6476
2	–0.1604	–48.9242
3	0.4904	149.5718
4	0.0043	1.3203
5	–0.2449	–74.7065
6	–0.8367	–255.2063
7	1.1477	350.0481
8	0.3786	115.4757
Permanent environmental effects		
4	–0.6156	–187.7634
5	–0.4151	–126.6150
6	–1.6853	–514.0274
7	2.8089	856.7092
8	–0.0928	–28.3035

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – rozwiązania efektów losowych

Animal effect	EBV for daily yield	EBV for 305-day yield
1	−0.3300	−100.6476
2	−0.1604	−48.9242
3	0.4904	149.5718
4	0.0043	1.3203
5	−0.2449	−74.7065
6	−0.8367	−255.2063
7	1.1477	350.0481
8	0.3786	115.4757



- Wartość hodowlana stała w ciągu laktacji
- EBV = u_1 = 305-day yield → -0.3300*305
- EBV np. do dnia 100 → -0.3300*100

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji losowej

Model regresji losowej

- Schaeffer and Dekkers (1994)
- Modelowanie przebiegu całej laktacji
- Wykorzystanie informacji o kowariancji pomiędzy poszczególnymi próbnymi udojami
- Różne korelacje w zależności od DIM
- Każda krowa → odrębna krzywa laktacji

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2022, Joanna Szyda

Model regresji losowej – model

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk}\,\beta_k + \sum_{k=0}^{NR} \omega_{tjk}\,u_{jk} + \sum_{k=0}^{NP} \rho_{tjk}\,pe_{jk} + e_{tij}$$

- y_{tij} wydajność próbnego udoju *t* krowy *j* w *i*-tej klasie htd
- htd_i *i*-ta klasa stado-próbny_udój
- β_k *k*-ty współczynnik regresji (efekt stały)
- φ_{tjk} *k*-ty współczynnik wielomianu Legendre'a dla krowy *j*
- *NF* stopień wielomianu Legendre'a dla efektów stałych
- e_{tij} błąd dla rekordu *t* krowy *j* w *i*-tej klasie htd

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji losowej – model

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk}\,\beta_k + \sum_{k=0}^{NR} \omega_{tjk}\,u_{jk} + \sum_{k=0}^{NP} \rho_{tjk}\,pe_{jk} + e_{tij}$$

- u_{jk} *k*-ty współczynnik regresji efektu addytywnie poligenicznego dla krowy *j* (efekt losowy)
- ω_{tjk} *k*-ty współczynnik wielomianu Legendre'a dla efektu addytywnie poligenicznego krowy *j*
- *NR* stopień wielomianu Legendre'a dla efektu addytywnie poligenicznego
- $var(u) = \mathbf{A} \otimes \boldsymbol{G}$ $\quad \boldsymbol{A} = N_{cows} \times N_{cows}$ $\quad \boldsymbol{G} = NR \times NR$

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji losowej – model

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk}\,\beta_k + \sum_{k=0}^{NR} \omega_{tjk}\,u_{jk} + \sum_{k=0}^{NP} \rho_{tjk}\,pe_{jk} + e_{tij}$$

- pe_{jk} *k*-ty współczynnik regresji efektu trwałego środowiskowego dla krowy *j* (efekt losowy)
- ρ_{tjk} *k*-ty współczynnik wielomianu Legendra'a dla efektu trwałego środowiskowego krowy *j*
- *NP* stopień wielomianu Legendre'a dla efektu trwałego środowiskowego
- $var(pe) = \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{P}$ $\quad \boldsymbol{I} = N_{cows} \times N_{cows}$ $\quad \boldsymbol{P} = NP \times NP$

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji losowej – struktura kowariancji

Macierz kowariancji fenotypowych próbnych udojów jednej krowy

$$V_y = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & r_{12}\sigma_1\sigma_2 & r_{13}\sigma_1\sigma_3 & \cdots & r_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ & \sigma_2^2 & r_{23}\sigma_2\sigma_3 & \cdots & r_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & symm. & & \sigma_{n-1}^2 & r_{n-1,n}\sigma_{n-1}\sigma_n \\ & & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

- Wariancja próbnego udoju *i*: $\sigma_{yi}^2 = \sigma_{u_i}^2 + \sigma_{pe_i}^2 + \sigma_{e_i}^2$
- Korelacja pomiędzy próbnymi udojami *i* oraz *j*: $r_{ij} = \frac{\sigma_{u_{ij}} + \sigma_{pe_{ij}}}{\sqrt{\sigma_{yi}^2 \sigma_{yj}^2}}$

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2022, Joanna Szyda

Model regresji losowej

- Model

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Xb} + \boldsymbol{Qu} + \boldsymbol{Zpe} + \boldsymbol{e}$$

- MME

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}^{-1} \otimes \boldsymbol{G}^{-1} & \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{P}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{pe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji losowej – dane

	Animals									
	4		5		6		7		8	
DIM	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY
4	1	17.0	1	23.0	6	10.4	4	22.8	1	22.2
38	2	18.6	2	21.0	7	12.3	5	22.4	2	20.0
72	3	24.0	3	18.0	8	13.2	6	21.4	3	21.0
106	4	20.0	4	17.0	9	11.6	7	18.8	4	23.0
140	5	20.0	5	16.2	10	8.4	8	18.3	5	16.8
174	6	15.6	6	14.0			9	16.2	6	11.0
208	7	16.0	7	14.2			10	15.0	7	13.0
242	8	13.0	8	13.4					8	17.0
276	9	8.2	9	11.8					9	13.0
310	10	8.0	10	11.4					10	12.6

DIM, days in milk; HTD, herd–test–day.

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji stałej – macierz wystąpień współczynników wielomianu

	Animals									
	4		5		6		7		8	
DIM	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY
4	1	17.0	1	23.0	6	10.4	4	22.8	1	22.2
38	2	18.6	2	21.0	7	12.3	5	22.4	2	20.0
72	3	24.0	3	18.0	8	13.2	6	21.4	3	21.0
106	4	20.0	4	17.0	9	11.6	7	18.8	4	23.0
140	5	20.0	5	16.2	10	8.4	8	18.3	5	16.8
174	6	15.6	6	14.0			9	16.2	6	11.0
208	7	16.0	7	14.2			10	15.0	7	13.0
242	8	13.0	8	13.4					8	17.0
276	9	8.2	9	11.8					9	13.0
310	10	8.0	10	11.4					10	12.6

DIM, days in milk; HTD, herd–test–day.

$$\boldsymbol{X_2} = N_{tds} \text{ x } NF$$

dla k=0 $\varphi(t) = 1$

dla k=1 $\varphi(t) = DIM^*$

dla k=2 $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(3DIM^{*2} - 1\right)$

dla k=3 $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(5DIM^{*3} - 3DIM^*\right)$

dla k=4 $\varphi(t) = \frac{1}{8}\left(35DIM^{*4} - 30DIM^{*2} + 3\right)$

Unormowane współczynniki $\varphi(DIM^*)$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{1/2}\,\varphi_0 & \sqrt{3/2}\,\varphi_1 & \sqrt{5/2}\,\varphi_2 & \sqrt{7/2}\,\varphi_3 & \sqrt{9/2}\,\varphi_4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0.7071 & -1.2247 & 1.5811 & -1.8704 & 2.1213 \\ 0.7071 & -0.9525 & 0.6441 & -0.0176 & -0.6205 \\ 0.7071 & -0.6804 & -0.0586 & 0.7573 & -0.7757 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.7071 & 0.6804 & -0.0586 & -0.7573 & -0.7757 \\ 0.7071 & 0.9525 & 0.6441 & 0.0176 & -0.6205 \\ 0.7071 & 1.2247 & 1.5811 & 1.8704 & 2.1213 \end{bmatrix}$$

krowa 4; próbny udój dla DIM=4

krowa 4; próbny udój dla DIM=38

krowa 4; próbny udój dla DIM=72

krowa 8; próbny udój dla DIM=242

krowa 8; próbny udój dla DIM=276

krowa 8; próbny udój dla DIM=310

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji losowej – macierz wystąpień efektu **u**

	Animals									
	4		5		6		7		8	
DIM	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY
4	1	17.0	1	23.0	6	10.4	4	22.8	1	22.2
38	2	18.6	2	21.0	7	12.3	5	22.4	2	20.0
72	3	24.0	3	18.0	8	13.2	6	21.4	3	21.0
106	4	20.0	4	17.0	9	11.6	7	18.8	4	23.0
140	5	20.0	5	16.2	10	8.4	8	18.3	5	16.8
174	6	15.6	6	14.0			9	16.2	6	11.0
208	7	16.0	7	14.2			10	15.0	7	13.0
242	8	13.0	8	13.4					8	17.0
276	9	8.2	9	11.8					9	13.0
310	10	8.0	10	11.4					10	12.6

DIM, days in milk; HTD, herd–test–day.

$$\boldsymbol{Q} = N_{tds} \text{ x } NR \cdot N_{cows}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{Q}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{Q}_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{Q}_7 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{Q}_8 \end{bmatrix}$$

Unormowane współczynniki $\omega(DIM^*)$

NR=3

$$\text{np. } \boldsymbol{Q}_6 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \sqrt{1/2}\,\omega_0 & \sqrt{3/2}\,\omega_1 & \sqrt{5/2}\,\omega_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7017 & -1.2247 & 1.5811 \\ 0.7017 & -0.9525 & 0.6441 \\ 0.7017 & -0.6804 & -0.0586 \\ 0.7017 & -0.4082 & -0.5271 \\ 0.7017 & -0.1361 & -0.7613 \end{bmatrix} \end{array}$$

krowa 6; próbny udój dla DIM=4

krowa 6; próbny udój dla DIM=38

krowa 6; próbny udój dla DIM=72

krowa 6; próbny udój dla DIM=106

krowa 6; próbny udój dla DIM=140

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji losowej – rozwiązania efektów stałych

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk}\,\beta_k + \sum_{k=0}^{NR} \omega_{tjk}\,u_{jk} + \sum_{k=0}^{NP} \rho_{tjk}\,pe_{jk} + e_{tij}$$

Effects	Solutions
Herd–test–day	
1	10.0862
2	7.5908
3	8.5601
4	8.2430
5	6.3161
6	3.0101
7	3.1085
8	3.1718
9	0.5044
10	0.0000
Fixed regression	
1	16.6384
2	–0.6253
3	–0.1346
4	0.3479
5	–0.4218

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji losowej – rozwiązania efektów losowych

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk}\,\beta_k + \sum_{k=0}^{NR} \omega_{tjk}\,u_{jk} + \sum_{k=0}^{NP} \rho_{tjk}\,pe_{jk} + e_{tij}$$

Animal	Regression coeffients			305-day breeding value
1	−0.0583	0.0552	0.0442	−12.3731
2	−0.0728	−0.0305	−0.0244	−15.7347
3	0.1311	−0.0247	0.0686	28.1078
4	0.3445	0.0063	−0.3164	74.8132
5	−0.4537	−0.0520	0.2798	−98.4153
6	−0.5485	0.0730	0.1946	−118.4265
7	0.8518	−0.0095	−0.3131	184.1701
8	0.2209	0.0127	−0.0174	47.6907

$$\left[\sum_{i=1}^{305}\omega_0 \quad \sum_{i=1}^{305}\omega_1 \quad \sum_{i=1}^{305}\omega_2\right]\begin{bmatrix}\hat{u}_{jk}\\ \hat{u}_{jk}\\ \hat{u}_{jk}\end{bmatrix}$$

Permanent environmental effects

Cow	Regression coefficients			305-day solutions
4	−0.6487	−0.3601	−1.4718	−138.4887
5	−0.7761	0.1370	0.9688	−168.5531
6	−1.9927	0.9851	−0.0693	−427.2378
7	3.5188	−1.0510	−0.4048	756.9415
8	−0.1013	0.2889	0.9771	−22.6619

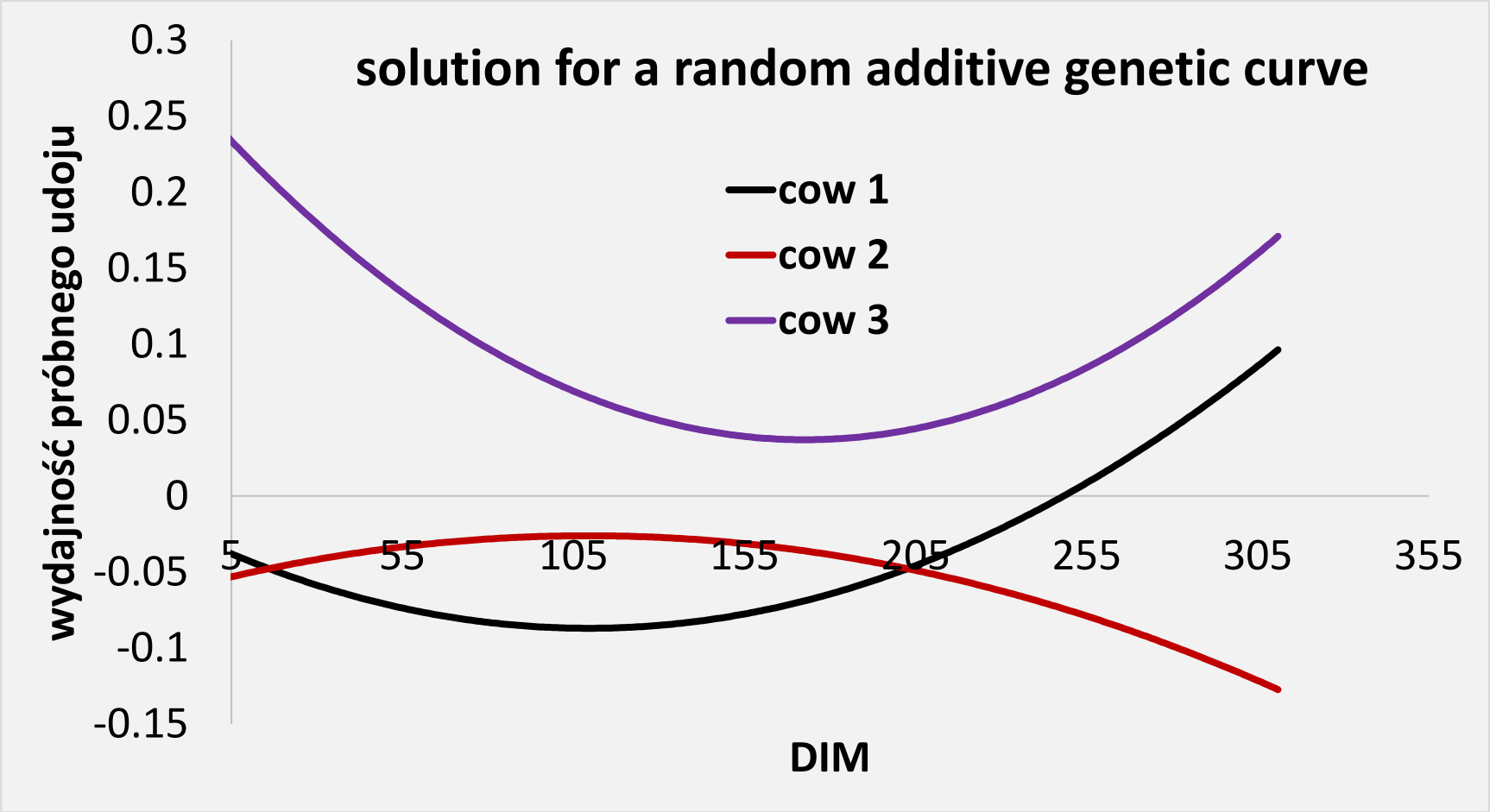
$$\left[\sum_{i=1}^{305}\rho_0 \quad \sum_{i=1}^{305}\rho_1 \quad \sum_{i=1}^{305}\rho_2\right]\begin{bmatrix}\widehat{pe}_{jk}\\ \widehat{pe}_{jk}\\ \widehat{pe}_{jk}\end{bmatrix}$$

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji losowej – rozwiązania ef. losowych

Animal	Regression coeffients			305-day breeding value
1	–0.0583	0.0552	0.0442	–12.3731
2	–0.0728	–0.0305	–0.0244	–15.7347
3	0.1311	–0.0247	0.0686	28.1078
4	0.3445	0.0063	–0.3164	74.8132
5	–0.4537	–0.0520	0.2798	–98.4153



R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji losowej – ocena rutynowa CAN

FORM GE Status as of: 2016-04-04

DESCRIPTION OF NATIONAL GENETIC EVALUATION SYSTEM AND TREND VALIDATION FOR PRODUCTION TRAITS

COUNTRY:	Canada
BREED (repeat as necessary):	Holstein, Ayrshire, Guernsey, Jersey, Brown Swiss, Canadienne and Milking Shorthorn
Trait definitions and units of measurement Attach an appendix if needed	Data: Milk, fat and protein kg within a 24-hour test period Proofs: Milk, fat, and protein kg across lactations 1,2 and 3
Criteria for inclusion of records	Includes all test day records between 5 and 305 days in milk (DIM) for animals with a known sire registration number. Test day records are expressed as 24-hour yields, which may be measured as supervised or unsupervised based on all milkings within 24 hours or an AM/PM program with timers.
Criteria for extension of records	No extension of records is required.
Time period for data inclusion	Cows which first calved since January 1, 1988 plus historical pedigree information (3 generations).
Sire categories	All bulls with progeny information including domestic and foreign AI bulls plus natural service herd sires.
Max. number of lactations per cow included in the evaluation	Actual test day records for lactations 1, 2 and 3 with equal weights for lactation, but AM/PM tests receiving a weight of .88.
Environmental effects*, pre-adjustments	Records are pre-adjusted for the effect of pregnancy on milk, fat and Protein yield. Heterogeneous herd-test day-parity, adjustment factors are estimated at every run.
Method (model) of genetic evaluation*	MT (milk yield, fat yield, protein yield) – ML (1, 2, 3) - RR – TD -BLUP–AM
Environmental effects* in the genetic evaluation model	Fixed: Herd-test day-parity (some are divided into management groups), DIM by trait and Parity, and Legendre curves for Year-Season-Region-Parity–Age of calving combinations (region only for Holstein, Year for HOL, AYS and JER) Random: Animal Legendre curve, Herd-year Legendre curve Legendre curve for permanent environment Legendre curves used are 4th order polynomials (all breeds)

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji losowej – ocena rutynowa DEU

Form GE

Status as of: 2019-04-02

DESCRIPTION OF NATIONAL GENETIC EVALUATION SYSTEMS

Country (or countries)	Germany, Austria and Luxembourg
Main trait group[1] **NOTE!** Only one trait group per form!	Production
Breed(s)	**HOL**stein (Black & White, Red & White), Red dairy cattle (**RDC**), **JER**sey
Trait definition(s) and unit(s) of measurement[2] Attach an appendix if needed	Milk (kg), fat (kg), protein (kg) on 24-hour daily basis
Method of measuring and collecting data	All production data collected by official milk recording agencies using ICAR certified milk recording methods
Time period for data inclusion	All test day records from 1990 onwards
Age groups (e.g. parities) included	First three lactations
Other criteria (data edits) for inclusion of records	Allowed ranges of age of calving for first three lactations are 20-40, 30-56 and 44-75 months, respectively. Range of days in milk is 5 to 330. Every test day record must have three yield traits and somatic cell score data available. Only lactations with at least 2 test day records are included in genetic evaluation.
Criteria for extension of records (if applicable)	Yields from single milking schemes are converted to 24-hour daily yield basis (Liu et al. 2000), prior to being included in genetic evaluation. The estimated daily yields from single milking schemes are assigned with lower accuracy than the standard A4 milk recording scheme.
Sire categories	All categories of bulls are evaluated jointly
Environmental effects[3]**, pre-adjustments**	No pre-adjustments for environmental effects
Method (model) of genetic evaluation[3]	ST – ML – RR – TD – BLUP – AM

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Wymiary modelu – ocena łatwości wydajności mleka → DE 2020

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Xb} + \boldsymbol{Qu} + \boldsymbol{Zpe} + \boldsymbol{e}$$

- $\boldsymbol{y}$ wektor 429 985 545 x 1 obserwacje fenotypowe
- $\boldsymbol{u}$ wektor 37 354 579 x 3 predyktory wartości hodowlanych
- $\boldsymbol{e}$ wektor 429 985 545 x 1 predyktory efektów losowych błędu
- $\boldsymbol{Q}$ macierz 429 985 545 x 37 354 579*3
- $\boldsymbol{Z}$ macierz 429 985 545 x 37 354 579*3

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

Model regresji losowej – ocena rutynowa POL

Form GE

Status as of: 2020-04-05

DESCRIPTION OF NATIONAL GENETIC EVALUATION SYSTEMS

Country (or countries)	Poland
Main trait group[1] **NOTE!** Only one trait group per form!	Production
Breed(s)	Polish Holstein-Friesians
Trait definition(s) and unit(s) of measurement[2] Attach an appendix if needed	Milk (kg), fat (kg), protein (kg)
Method of measuring and collecting data	Test-day records between 5 and 305 days in milk. Known sire required. Supervised milkings from A4, AT4, A8 systems.
Time period for data inclusion	All test day records from 1995
Age groups (e.g. parities) included	First three lactations
Other criteria (data edits) for inclusion of records	Minimum/maximum daily milk yield: 1.0/99.9, fat content 1.5%/9.0%, protein content 1.0%/7.0%
Criteria for extension of records (if applicable)	Observations from AT4 systems multiplied by correction factors.
Sire categories	All bulls with progeny information including domestic and foreign AI bulls
Environmental effects[3]**, pre-adjustments**	No pre-adjustments for environmental effects
Method (model) of genetic evaluation[3]	ST – ML – RR – TD – BLUP – AM

R.A. Mrode 2005 Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values

Copyright ©2020, Joanna Szyda

1. Dane powtarzalne w czasie
2. Model regresji stałej
3. Model regresji losowej
4. **… egzamin**