



ALGEBRA MACIERZOWA

Dawid Słomian



Analiza danych hodowlanych wymaga terminologii macierzowej do:

- Definiowania modeli statystycznych
- Opisu metodyki estymacji parametrów modeli
- Opisu metodyki estymacji komponentów wariancji

Wielowymiarowa struktura danych

■ Struktura spokrewnienia

```
dawid.slomian@iz-pib.local@srvmixblup02:~/data_Wageningen
HOLDEUM000363384315 HOLDEUM000955256129 HOLDEUF000361214486 2022
HOLPOLF005458858203 HOL840M003150687270 HOLPOLF005374216323 2022
HOLDEUM000363894963 HOLDEUM000770618336 HOLDEUF000361510669 2022
HOLDEUM000363384333 HOLDEUM001262598996 HOLDEUF000361214494 2022
HOLPOLF005439318580 HOLCANM000012948857 HOLPOLF005473248645 2022
HOLPOLF005439318542 HOLCANM000012948857 HOLPOLF005385920745 2022
HOLPOLF005477372018 HOLCANM000012948857 HOLPOLF005473248638 2022
HOLPOLF005439318504 HOLCANM000012948857 HOLPOLF005385920721 2022
HOLPOLF005486370852 HOL840M003205435835 HOLPOLF005477527524 2022
HOLPOLF005449323925 HOL840M003200270323 HOLPOLF005474974734 2022
HOLPOLF005495286168 HOLDEUM000361395670 HOLPOLF005356887930 2022
HOLPOLF005495286175 HOLDEUM000361395670 HOLPOLF005356887893 2022
HOLDEUM000364485862 HOLDEUM001406051280 HOLDEUF000362322805 2022
HOLPOLF005424902619 HOLDEUM000123451744 HOLPOLF005504749059 2022
HOLPOLF005424902848 HOLDEUM000123451744 HOLPOLF005504748496 2022
HOLPOLF005494650922 HOLPOLM005383706570 HOLPOLF005478264558 2022
HOLPOLF005516165007 HOLESMP002704695950 HOLPOLF005456754170 2022
HOLPOLF005490895730 HOLDNKM002468005724 HOLPOLF005433537468 2022
HOLNLDM000575219063 HOLFRAM007253843259 HOLNLDF000648155777 2022
HOLFRAF001602131351 HOL840M003204165040 HOLFRAF001602130022 2022
HOLFRAF001602131285 HOL840M003204165040 HOLFRAF001602130305 2022
HOLFRAF001602131211 HOL840M003204165040 HOLFRAF001602130273 2022
HOLFRAF001602131247 HOL840M003204165040 HOLFRAF001602130270 2022
```

Wielowymiarowa struktura danych

■ Struktura fenotypów

```
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 68005 7 26 7 14.861 0.515 0.415 0.008 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 68006 7 88 7 11.315 0.465 0.349 0.009 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 68007 7 117 7 14.5 0.608 0.467 0.009 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 143197 7 150 7 16.767 0.702 0.494 0.01 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 81638 7 180 7 16.253 0.588 0.519 0.008 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 81639 7 212 7 13.991 0.5 0.465 0.008 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 81640 7 246 7 15.179 0.534 0.498 0.009 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 81641 7 273 7 19.971 0.696 0.702 0.01 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 81644 6 9 6 -99 -99 -99 -99 22.073 0.788 0.786 0.017 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 81645 6 36 6 -99 -99 -99 -99 20.858 0.585 0.543 0.02 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 81646 6 97 6 -99 -99 -99 -99 14.897 0.553 0.443 0.014 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 143198 6 128 6 -99 -99 -99 -99 16.577 0.561 0.479 0.009 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 121916 6 163 6 -99 -99 -99 -99 15.859 0.541 0.512 0.005 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 116395 6 192 6 -99 -99 -99 -99 15.85 0.579 0.527 0.001 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 116396 6 223 6 -99 -99 -99 -99 15.695 0.574 0.491 0.001 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005393005465 HOLPOLF005393005465 121917 6 251 6 -99 -99 -99 -99 12.042 0.507 0.403 0.002 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005361229435 HOLPOLF005361229435 48853 110 8 30 25.242 1.027 0.842 3.422 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005361229435 HOLPOLF005361229435 92471 110 37 30 26.243 0.919 0.756 3.089 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005361229435 HOLPOLF005361229435 92472 110 99 30 22.821 0.811 0.724 5.06 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005361229435 HOLPOLF005361229435 92473 110 130 30 22.809 0.745 0.824 1.313 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005361229435 HOLPOLF005361229435 92474 110 161 30 20.022 0.738 0.711 0.761 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005361229435 HOLPOLF005361229435 92475 110 190 30 11.466 0.49 0.393 2.949 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
HOLPOLF005361229435 HOLPOLF005361229435 145291 110 225 30 17.437 0.722 0.644 8.687 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99 -99
```

Wielowymiarowa struktura danych

Numeracja osobników:

- | | |
|----------------------------|---------------------|
| ■ Nr krajowy (14b): | PL005153906711 |
| ■ Nr międzynarodowy (19b): | HOLPOLF005153906711 |
| ■ HOLAUTM000418617409 | ? |
| ■ HOLBELM000116890226 | ? |

Kody krajów używane w ID zwierząt

Abbrev. Country		RFID code	Abbrev. Country		RFID code
ARG	Argentina	32	ITA	Italy	380
AUS	Australia	36	JPN	Japan	392
AUT	Austria	40	KAZ	Kazakhstan	398
BEL	Belgium	56	KOR	South Korea	410
BGR	Bulgaria	100	LTU	Lithuania	440
CAN	Canada	124	LUX	Luxembourg	442
CHE	Switzerland	756	LVA	Latvia	428
CRI	Costa Rica	188	MEX	Mexico	484
CRO	Croatia (obsolete)		NLD	Netherlands	528
CSK	Czech Rep. (obsolete)		NOR	Norway	578
CZE	Czech Republic	203	NZL	New Zealand	554
DEU	Germany	276	PER	Peru	604
DNK	Denmark	208	POL	Poland	616
DOM	Dominican Republic	214	PRT	Portugal	620
ESP	Spain	724	ROM	Romania (obsolete)	
EST	Estonia	233	ROU	Romania	642
FIN	Finland	246	RUS	Russia	643
FRA	France	250	SRB	Serbia	688
GBR	Great Britain	826	SLO	Slovenia (obsolete)	
GRC	Greece	300	SVK	Slovak Republic	703
HRV	Croatia	191	SVN	Slovenia	705
HUN	Hungary	348	SWE	Sweden	752
IJE	Isle of Jersey (obsolete)*		TUN	Tunisia	788
IND	India	356	USA	United States of America	840
IRN	Iran	364	YUG	Yugoslavia	891
IRL	Ireland	372	ZAF	South African Republic	710
ISR	Israel	376	ZWE	Zimbabwe	716

Macierze

- Macierz to struktura matematyczna, która składa się z uporządkowanego zestawu elementów ułożonych w formie tabeli, gdzie poszczególne elementy są rozmieszczone w rzędach i kolumnach.
- Formalnie, macierz jest zbiorem liczb lub wyrażeń algebraicznych ułożonych w formie prostokątnej tabeli, gdzie każda liczba lub wyrażenie zajmuje określone miejsce w macierzy, identyfikowane przez swoje współrzędne, tj. numer wiersza i numer kolumny.

Macierze

- Macierz jednowymiarowa = wektor

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}' = [2 \quad 4 \quad 5] \quad \mathbf{a}^T = [2 \quad 4 \quad 5]$$

- Macierz dwuwymiarowa

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$$

m_{ij} element macierzy

wymiary macierzy (liczba wierszy i kolumn)

$$\mathbf{M}_{2 \times 3}$$

- Macierze wielowymiarowe

Szczególne przypadki macierzy

- Macierz kwadratowa (square matrix)

$$M_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- m_{ii} elementy przekątnej (diagonal)
- m_{ij} elementy poza-przekątną (off-diagonal)

Szczególne przypadki macierzy

- Macierz kwadratowa (square matrix)
- Przykładowo: Macierz spokrewnień addytywnie poligenicznych (additive genetic relationship matrix)

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.25 & 0.25 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 1.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Szczególne przypadki macierzy

- Macierz diagonalna (diagonal matrix)

$$\mathbf{M}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- Macierz kwadratowa z poza-przekątnymi = 0

Szczególne przypadki macierzy

- Macierz diagonalna (diagonal matrix)
- Przykładowo: Macierz kowariancji efektów błędu (residual)

$$\mathbf{M}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EDC_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EDC_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EDC_3} \end{bmatrix} \sigma_e^2$$

Szczególne przypadki macierzy

- Macierz jednostkowa (identity matrix)

$$I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Macierz diagonalna z przekątnymi = 1

Szczególne przypadki macierzy

- Macierz jednostkowa (identity matrix)
- Przykładowo: Macierz kowariancji efektów błędu

$$\mathbf{M}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma_e^2$$

Szczególne przypadki macierzy

- Macierz trójkątna (triangular matrix)

$$\mathbf{L}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Lower triangular

$$\mathbf{U}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Upper triangular

- Macierz z elementami ponad/pod przekątną = 0

Szczególne przypadki macierzy

- Macierz trójkątna (triangular matrix)
- Dekompozycja Choleskiego $\rightarrow M=TT'$
- Np. dekompozycja macierzy spokrewnień A

$$A=TD T'$$

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{matrix} & \begin{matrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 1.0 \\ 0.0 & 0.625 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 1.0 \end{matrix} \end{matrix}$$

Dekompozycja Choleskiego

■ $A = TT'$

Dla powyższej macierzy A , można obliczyć T w następujący sposób:

■ $T_{11} = \sqrt{A_{11}} = \sqrt{4} = 2$

■ $T_{21} = \frac{A_{21}}{T_{11}} = \frac{6}{2} = 3$

■ $T_{22} = \sqrt{A_{22} - T_{21}^2} = \sqrt{25 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$

■ $T_{31} = \frac{A_{31}}{T_{11}} = \frac{10}{2} = 5$

■ $T_{32} = \frac{A_{32} - T_{21} * T_{31}}{T_{22}} = \frac{19 - 3 * 5}{4} = 1$

■ $T_{33} = \sqrt{A_{33} - T_{31}^2 - T_{32}^2} = \sqrt{46 - 25 - 1} = 2\sqrt{5}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 6 & 25 & 19 \\ 10 & 19 & 46 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$T' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Szczególne przypadki macierzy

- Macierz symetryczna (symmetric matrix)

$$\mathbf{M}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- Macierz kwadratowa z $m_{ij} = m_{ji}$

Szczególne przypadki macierzy

- Macierz symetryczna (symmetric matrix)
- Przykładowo: Macierz spokrewnień addytywnie poligenicznych (additive genetic relationship matrix)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.25 & 0.25 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 1.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Szczególne przypadki macierzy

■ Macierz rzadka (sparse)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 5.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.0 \end{bmatrix}$$

■ Macierz gęsta (dense)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1.3 & 2.7 & 8 & -4 & 5 \\ 2.6 & 5.4 & 16 & -8 & 10 \\ 8 & 16 & 4 & 6 & 14 \\ -4 & -8 & 6 & 7 & 17 \\ 5 & 10 & 14 & 17 & 12 \end{bmatrix}$$

Transpozycja macierzy

- $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad a' = [2 \quad 4 \quad 5]$

- $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad a' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

- $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad a' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

Operacje na macierzach

- Dodawanie / odejmowanie

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$W = M + N = \begin{bmatrix} 2 + 5 & 4 + 7 & 5 + 4 \\ 6 + 0 & 8 + 7 & 9 + 3 \end{bmatrix}$$

- Macierze o identycznych wymiarach
- $w_{ij} = m_{ij} + n_{ij}$

Operacje na macierzach

■ Mnożenie

$$M_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} N_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$W_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 45 & 89 \\ 89 & 191 \\ 27 & 51 \end{bmatrix}$$

■ $W_{11} = (2 \cdot 2) + (4 \cdot 4) + (5 \cdot 5)$

■ $W_{12} = (2 \cdot 6) + (4 \cdot 8) + (5 \cdot 9)$

■ $W_{21} = (6 \cdot 2) + (8 \cdot 4) + (9 \cdot 5)$

■ $W_{22} = (6 \cdot 6) + (8 \cdot 8) + (9 \cdot 9)$

■ $W_{31} = (1 \cdot 2) + (0 \cdot 4) + (5 \cdot 5)$

■ $W_{32} = (1 \cdot 6) + (0 \cdot 8) + (5 \cdot 9)$

■ $MN \neq NM \quad IM = MI = M \quad Mb = m_{ij}b$

Operacje na macierzach

- Iloczyn Kroneckera (Konecker / direct product)

$$G \otimes M = \begin{bmatrix} g_{11}M & g_{12}M \\ g_{21}M & g_{22}M \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 20 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G \otimes M = \begin{bmatrix} 10M & 5M \\ 5M & 20M \end{bmatrix}$$

$$G \otimes M = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 40 & 0 & 5 & 20 \\ 20 & 40 & 10 & 10 & 20 & 5 \\ 5 & 0 & 10 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 5 & 20 & 0 & 20 & 80 \\ 10 & 20 & 5 & 40 & 80 & 20 \end{bmatrix}$$

Operacje na macierzach

- Odwrotność (inverse)

$$\mathbf{M}^{-1} \quad \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} = \mathbf{I} = \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \quad (\mathbf{MN})^{-1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}^{-1}$$

- Tylko macierze kwadratowe są odwracalne

- Odwracanie macierzy diagonalnej

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Operacje na macierzach

■ Odwracanie macierzy blokowo-diagonalnej

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & & & & \\ m_{12} & m_{22} & & & & \\ & & m_{33} & m_{34} & & \\ & & m_{34} & m_{44} & & \\ & & & & m_{55} & m_{56} \\ & & & & m_{56} & m_{66} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m}_3^{-1} \end{bmatrix}$$

Operacje na macierzach

- Wyznacznik (determinant)
- Skalar
- $\det(\mathbf{M})$, $|\mathbf{M}|$
- zdefiniowany tylko dla macierzy kwadratowych

$$|\mathbf{M}| = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

Operacje na macierzach

- Odwrotność (inverse)
- Macierze kwadratowe są odwracalne jeżeli wyznacznik (determinant) $\neq 0$
- Wyznacznik = 0 $\rightarrow$ macierz osobliwa (singular), nieodwracalna

Odwracanie macierzy 2x2

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}$$

Operacje na macierzach

- Równanie liniowe w formie macierzowej
- $y = Ab$
- $b = A^{-1}y$

Operacje na macierzach

- Rząd macierzy (matrix rank)
- Liczba liniowo niezależnych wierszy / kolumn
- $r(M)$
- $r(M) = \text{liczba wierszy i kolumn} \rightarrow \text{macierz pełnego rzędu (full rank)}$
- $r(M) < \text{liczba wierszy i kolumn} \rightarrow \text{macierz niepełnego rzędu} \rightarrow \text{wyznacznik} = 0 \rightarrow \text{macierz nie jest odwracalna}$

Operacje na macierzach

Uogólniona odwrotność (generalised inverse)

- Moore–Penrose pseudoinverse
- Dla danej macierzy M istnieje kilka M'
- Macierze niepełnego rzędu
- Macierze niekwadratowe
- Dedykowane biblioteki, funkcje → `ginv`

Operacje na macierzach

Uogólniona odwrotność (generalised inverse)

- M' $MM'M = M$
- Uzyskanie macierzy odwrotnej:
 - *Wyznaczyć sub-macierz B pełnego rzędu*
 - *Wyzerować wszystkie elementy macierzy M*
 - *Odwrócić macierz B*
 - *Uzupełnić korespondujące elementy M przez B^{-1}*

Uogólniona odwrotność (generalised inverse)

Uogólniona odwrotność (generalised inverse)

- $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \\ 4 & 3 & \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & \\ -4 & 3 & \end{bmatrix}$

- $M^{-} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dziękuję za uwagę.