



METODY REDUKCJI WYMIARÓW MODELI WIELOCECHOWYCH BLUP

Dawid Słomian



Dane powtarzalne w czasie

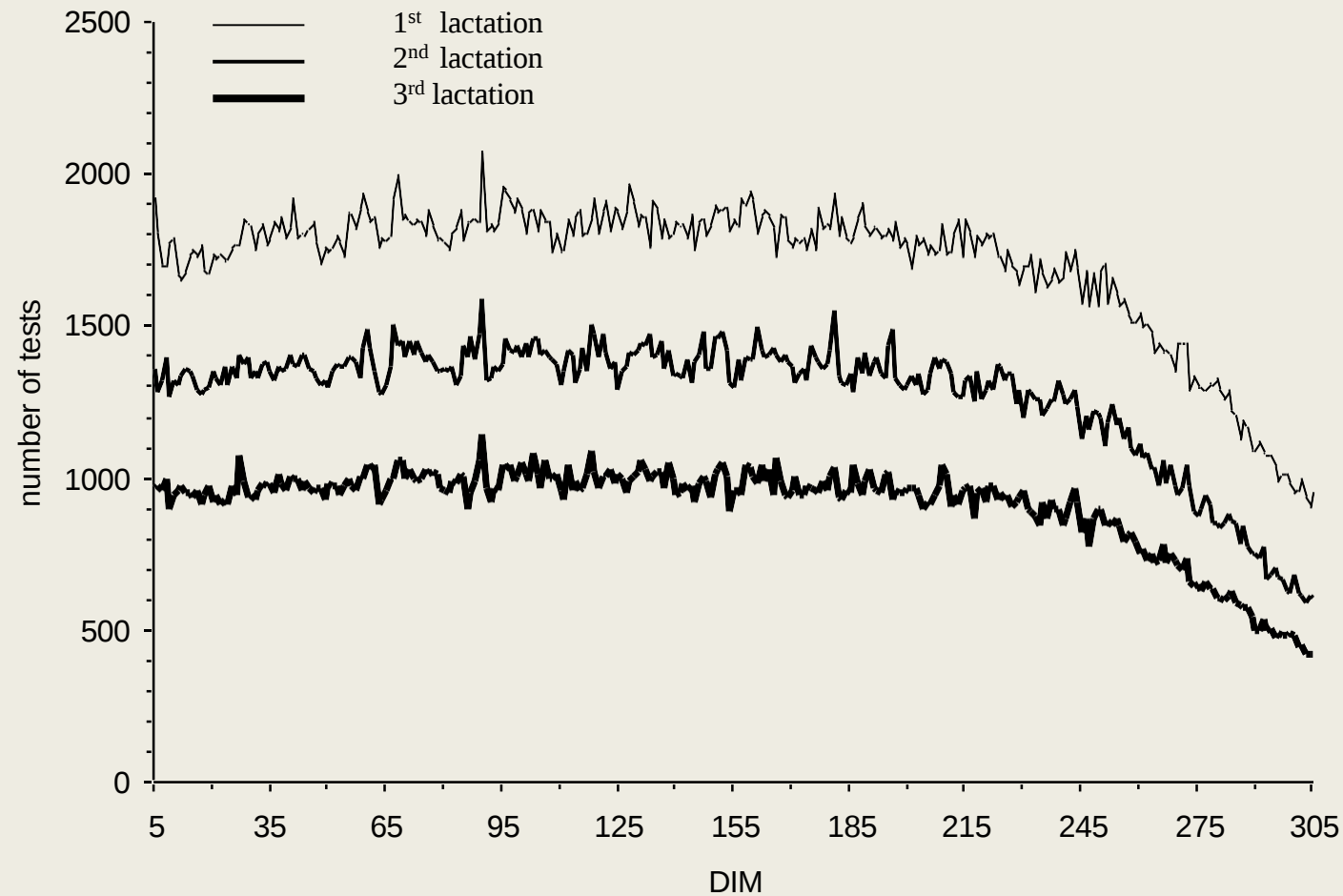
- Próbne udoje (*test day records*)
 - Rutynowa kontrola użytkowości w stadach krów mlecznych
 - Średnio raz w miesiącu
 - Wydajność mleka, tłuszczu, białka + SCC
- DIM (*days in milk*)
 - Liczba dni pomiędzy początkiem laktacji, a próbnym udojem

Dane powtarzalne w czasie

- Laktacja 305-cio dniowa
 - Wydajności próbných udojów przeliczone na standardową 305-cio dniową wydajność
 - Wydajność krowy w laktacji wyrażona 1 liczbą
- Problemy w modelowaniu statystycznym
 - Zmiany wartości efektów stałych w czasie laktacji np. stado
 - Osobniki z niezakończonymi laktacjami
 - Zmienne wartości parametrów genetycznych w czasie trwania laktacji

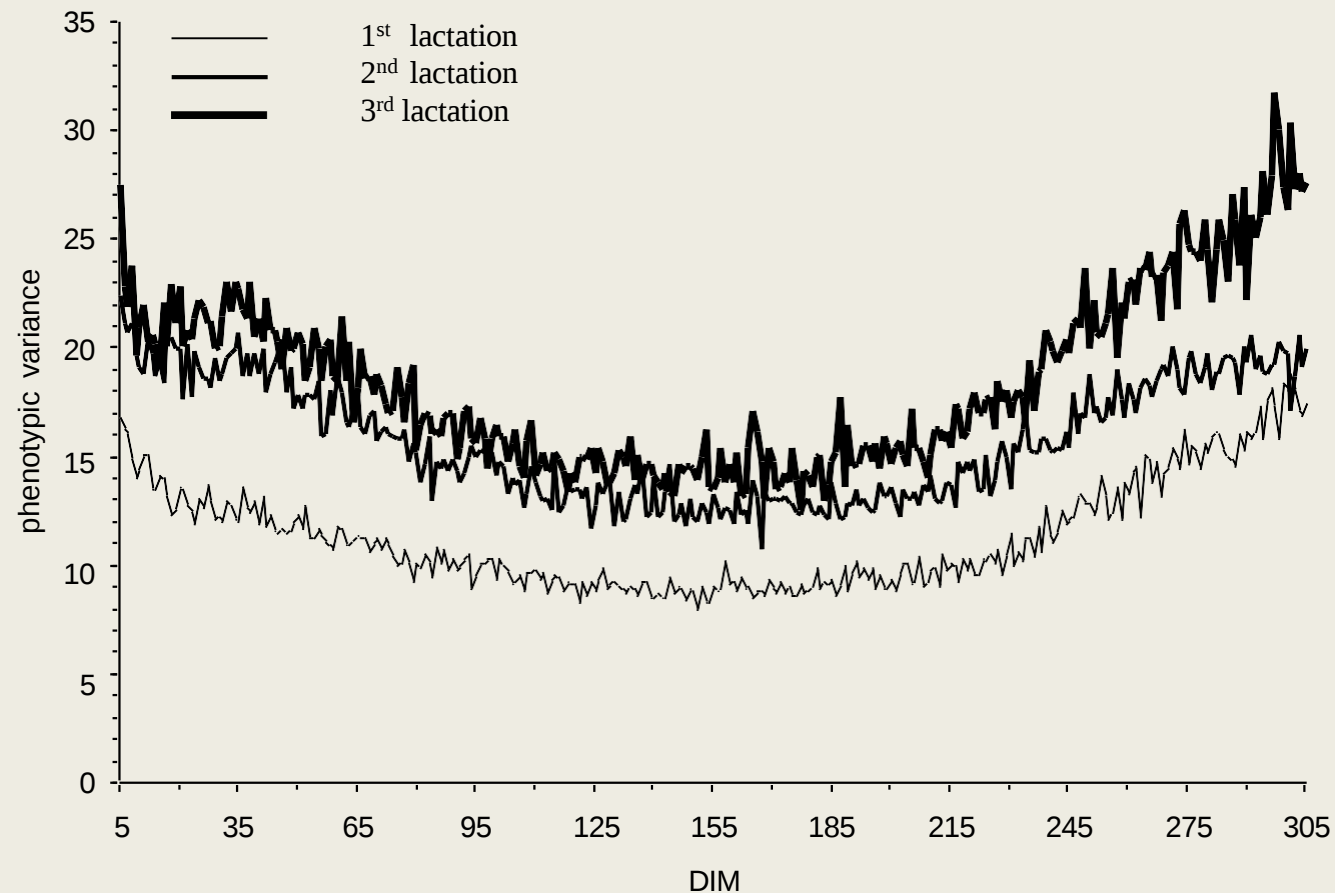
Dane powtarzalne w czasie

- Liczba próbnych udojów w ciągu laktacji



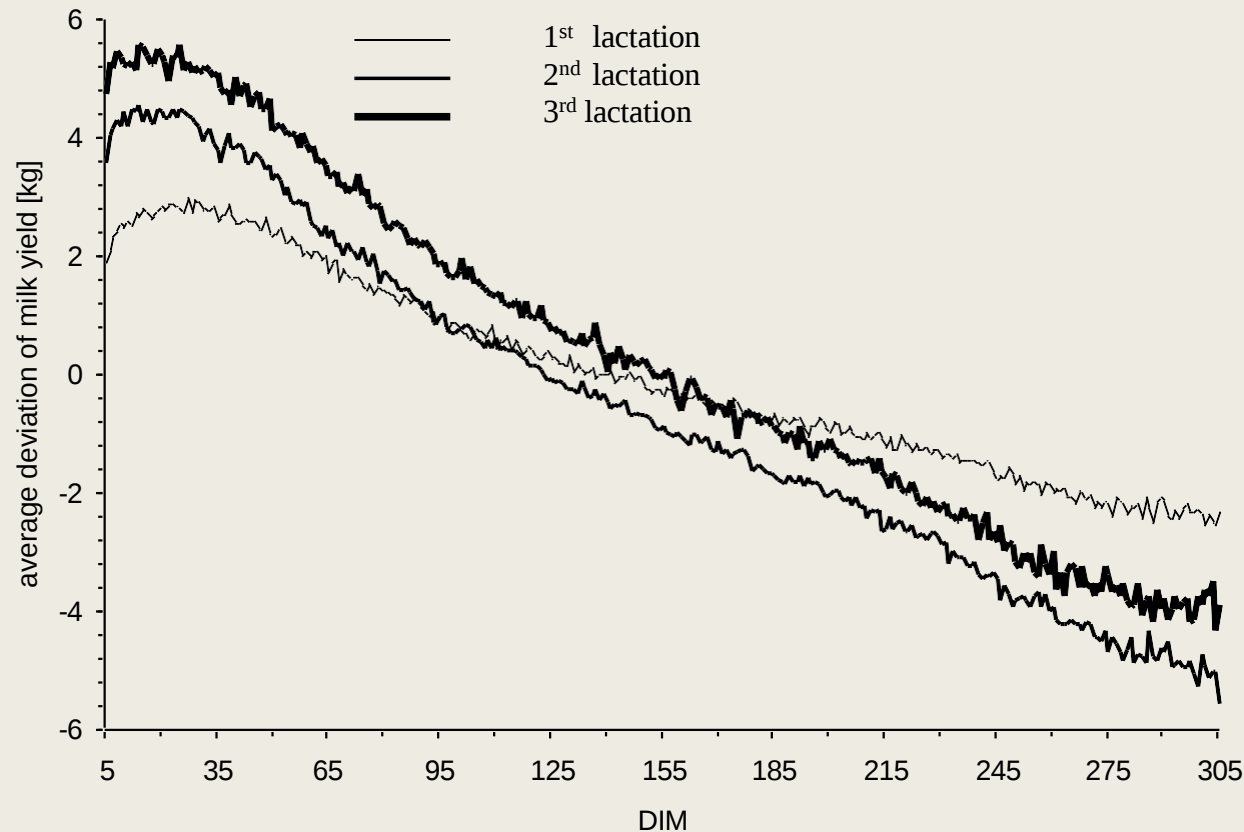
Dane powtarzalne w czasie

- Wariacja fenotypowa próbnych udojów



Dane powtarzalne w czasie

- Odchylenie wydajności próbnego udoju osobnika od średniej dla grupy stado-dzień_testu-laktacja



Model regresji stałej

- **Ptak** and Schaeffer (1993)
- Modelowanie przebiegu całej laktacji
- Wykorzystanie informacji o kowariancji pomiędzy poszczególnymi próbnymi udojami
- Grupy krów = grupy efektów stałych → odrębne krzywe laktacji

Model regresji stałej – model

NF

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0} \varphi_{tjk} \beta_k + u_j + pe_j + e_{tij}$$

y_{tij} wydajność próbnego udoju t krowy j w i -tej klasie htd

htd_i i -ta klasa stado-próbny_udój

NF stopień wielomianu Legendre'a dla efektów stałych

β_k k -ty współczynnik regresji (efekt stały)

φ_{tjk} k -ty współczynnik wielomianu Legendre'a dla krowy j

u_j efekt addytywnie genetyczny osobnika j

pe_j efekt trwały środowiskowy osobnika j

e_{tij} błąd dla rekordu t krowy j w i -tej klasie htd

Model regresji stałej – model

NF

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0} \varphi_{tjk} \beta_k + u_j + pe_j + e_{tij}$$

y_{tij} wydajność próbnego udoju t krowy j w i -tej klasie htd

htd_i i -ta klasa stado-próbny_udój

NF stopień wielomianu Legendre'a dla efektów stałych

β_k k -ty współczynnik regresji (efekt stały)

φ_{tjk} k -ty współczynnik wielomianu Legendre'a dla krowy j

u_j efekt addytywnie genetyczny osobnika j

pe_j efekt trwały środowiskowy osobnika j

e_{tij} błąd dla rekordu t krowy j w i -tej klasie htd

błąd dla rekordu t krowy j w i -tej klasie htd

Model regresji stałej – Legendra'e polynomials

Współczynniki wielomianu Legendre'a:

$$\varphi_t = \varphi(t) = \varphi(DIM^*)$$

$$DIM^* = -1 + 2 \frac{DIM - DIM_{min}}{DIM_{max} - DIM_{min}}$$

- dla $k=0$ $\varphi(t) = 1$
- dla $k=1$ $\varphi(t) = DIM^*$
- dla $k=2$ $\varphi(t) = \frac{1}{2}(3DIM^{*2} - 1)$
- dla $k=3$ $\varphi(t) = \frac{1}{2}(5DIM^{*3} - 3DIM^*)$
- dla $k=4$ $\varphi(t) = \frac{1}{8}(35DIM^{*4} - 30DIM^{*2} + 3)$

Model regresji stałej – model

Efekt trwały środowiskowy

- *permanent environmental effect*
- Efekt nie-genetyczny osobnika
- Wpływ środowiska na powtarzalne wydajności osobnika np. na poszczególne próbne udoje

Model regresji stałej – struktura kowariancji

- $var(u_j) = A\sigma_u^2$
 - $var(pe_j) = I\sigma_{pe}^2$
 - $var(e_{tij}) = I\sigma_e^2$
- } Identyczna struktura kowariancji?

Różne wymiary wektorów ***pe*** i ***e***, różne macierze wystąpień

- ***pe*** liczba krów x 1
- ***e*** liczba próbných udojów x 1

Macierz kowariancji fenotypowych próbnych udojów dla jednej krowy

$$V_y = \begin{bmatrix} \sigma^2 & r \sigma^2 & r \sigma^2 & \dots & r \sigma^2 \\ & \sigma^2 & r \sigma^2 & \dots & r \sigma^2 \\ & & \dots & \dots & \\ & \text{symm.} & & \sigma^2 & r \sigma^2 \\ & & & & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

- Wariancja próbnego udoju: σ^2
- Korelacja pomiędzy próbnymi udojami udojami i oraz j : $r_{ij} = \frac{\sigma_u^2 + \sigma_{pe}^2}{\sqrt{\sigma_{yi}^2 \sigma_{yj}^2}}$

Model regresji stałej

- Model

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{Q}\mathbf{u} + \mathbf{Z}\mathbf{pe} + \mathbf{e}$$

- MME

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X} & \mathbf{X}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q} & \mathbf{X}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X} & \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{A}^{-1} \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2} & \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X} & \mathbf{Z}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q} & \mathbf{Z}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z} + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_{pe}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{pe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \\ \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \\ \mathbf{Z}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

Model regresji stałej

$$y = \mathbf{Xb} + Qu + Zpe + e$$

$$\mathbf{Xb} = X_1b_1 + X_2b_2$$

standardowe efekty
stałe np. htd

współczynniki wielomianów
Legendra

- Wymiary:

$X_1 = N_{tds} \times N_{htd} \rightarrow$ macierz wystąpień $X_1 \in \{0, 1\}$

$X_2 = N_{tds} \times NF \rightarrow$ macierz eksperymentu $X_2 \in \{\varphi_{tjk}\}$

Model regresji stałej - dane

DIM	Animals									
	4		5		6		7		8	
	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY
4	1	17.0	1	23.0	6	10.4	4	22.8	1	22.2
38	2	18.6	2	21.0	7	12.3	5	22.4	2	20.0
72	3	24.0	3	18.0	8	13.2	6	21.4	3	21.0
106	4	20.0	4	17.0	9	11.6	7	18.8	4	23.0
140	5	20.0	5	16.2	10	8.4	8	18.3	5	16.8
174	6	15.6	6	14.0			9	16.2	6	11.0
208	7	16.0	7	14.2			10	15.0	7	13.0
242	8	13.0	8	13.4					8	17.0
276	9	8.2	9	11.8					9	13.0
310	10	8.0	10	11.4					10	12.6

DIM, days in milk; HTD, herd-test-day.

Model regresji stałej – macierz wystąpień współczynników wielomianu

DIM	Animals									
	4		5		6		7		8	
	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY
4	1	17.0	1	23.0	6	10.4	4	22.8	1	22.2
38	2	18.6	2	21.0	7	12.3	5	22.4	2	20.0
72	3	24.0	3	18.0	8	13.2	6	21.4	3	21.0
106	4	20.0	4	17.0	9	11.6	7	18.8	4	23.0
140	5	20.0	5	16.2	10	8.4	8	18.3	5	16.8
174	6	15.6	6	14.0			9	16.2	6	11.0
208	7	16.0	7	14.2			10	15.0	7	13.0
242	8	13.0	8	13.4					8	17.0
276	9	8.2	9	11.8					9	13.0
310	10	8.0	10	11.4					10	12.6

DIM, days in milk; HTD, herd-test-day.

$$X_2 = N_{tds} \times NF$$

dla $k=0$ $\varphi(t) = 1$

dla $k=1$ $\varphi(t) = DIM^*$

dla $k=2$ $\varphi(t) = \frac{1}{2}(3DIM^{*2} - 1)$

dla $k=3$ $\varphi(t) = \frac{1}{2}(5DIM^{*3} - 3DIM^*)$

dla $k=4$ $\varphi(t) = \frac{1}{8}(35DIM^{*4} - 30DIM^{*2} + 3)$

Unormowane współczynniki $\varphi(DIM^*)$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\varphi_0 \quad \sqrt{\frac{3}{2}}\varphi_1 \quad \sqrt{\frac{5}{2}}\varphi_2 \quad \sqrt{\frac{7}{2}}\varphi_3 \quad \sqrt{\frac{9}{2}}\varphi_4$$

0.7071	-1.2247	1.5811	-1.8704	2.1213
0.7071	-0.9525	0.6441	-0.0176	-0.6205
0.7071	-0.6804	-0.0586	0.7573	-0.7757
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.7071	0.6804	-0.0586	-0.7573	-0.7757
0.7071	0.9525	0.6441	0.0176	-0.6205
0.7071	1.2247	1.5811	1.8704	2.1213

krowa 4; próbny udój dla DIM=4

krowa 4; próbny udój dla DIM=38

krowa 4; próbny udój dla DIM=72

krowa 8; próbny udój dla DIM=242

krowa 8; próbny udój dla DIM=276

krowa 8; próbny udój dla DIM=310

Model regresji stałej – macierz wystąpień efektu u

DIM	Animals									
	4		5		6		7		8	
	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY
4	1	17.0	1	23.0	6	10.4	4	22.8	1	22.2
98	2	18.6	2	21.0	7	12.3	5	22.4	2	20.0
72	3	24.0	3	18.0	8	13.2	6	21.4	3	21.0
106	4	20.0	4	17.0	9	11.6	7	18.8	4	23.0
140	5	20.0	5	16.2	10	8.4	8	18.3	5	16.8
174	6	15.6	6	14.0			9	16.2	6	11.0
208	7	16.0	7	14.2			10	15.0	7	13.0
242	8	13.0	8	13.4					8	17.0
276	9	8.2	9	11.8					9	13.0
310	10	8.0	10	11.4					10	12.6

DIM, days in milk; HTD, herd-test-day.

$$Q = N_{tds} \times N_{cows}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_8 \end{bmatrix}$$

q_i wektor „1” dla pr. udojów osobnika i

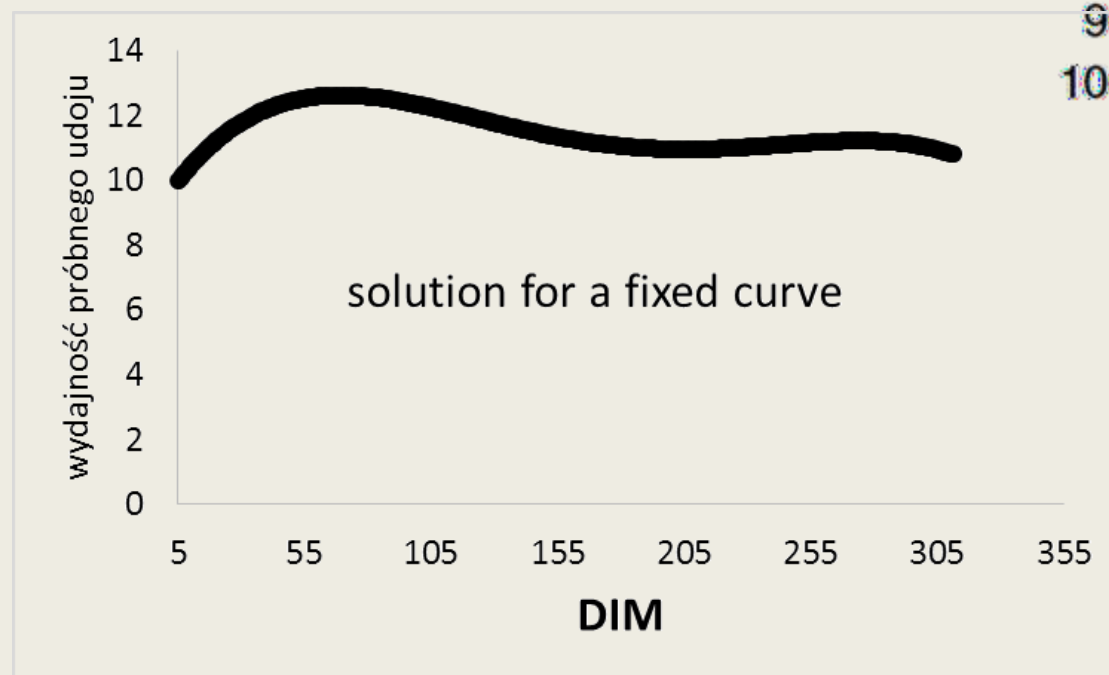
Model regresji stałej – rozwiązania efektów stałych

Fixed regression coefficients

1	16.3082
2	-0.5227
3	-0.1245
4	0.5355
5	-0.4195

Herd-test-day

1	10.9783
2	7.9951
3	8.7031
4	8.2806
5	6.3813
6	3.1893
7	3.3099
8	3.3897
9	0.6751
10	0.0000

[illegible]

Model regresji stałej – rozwiązania efektów losowych

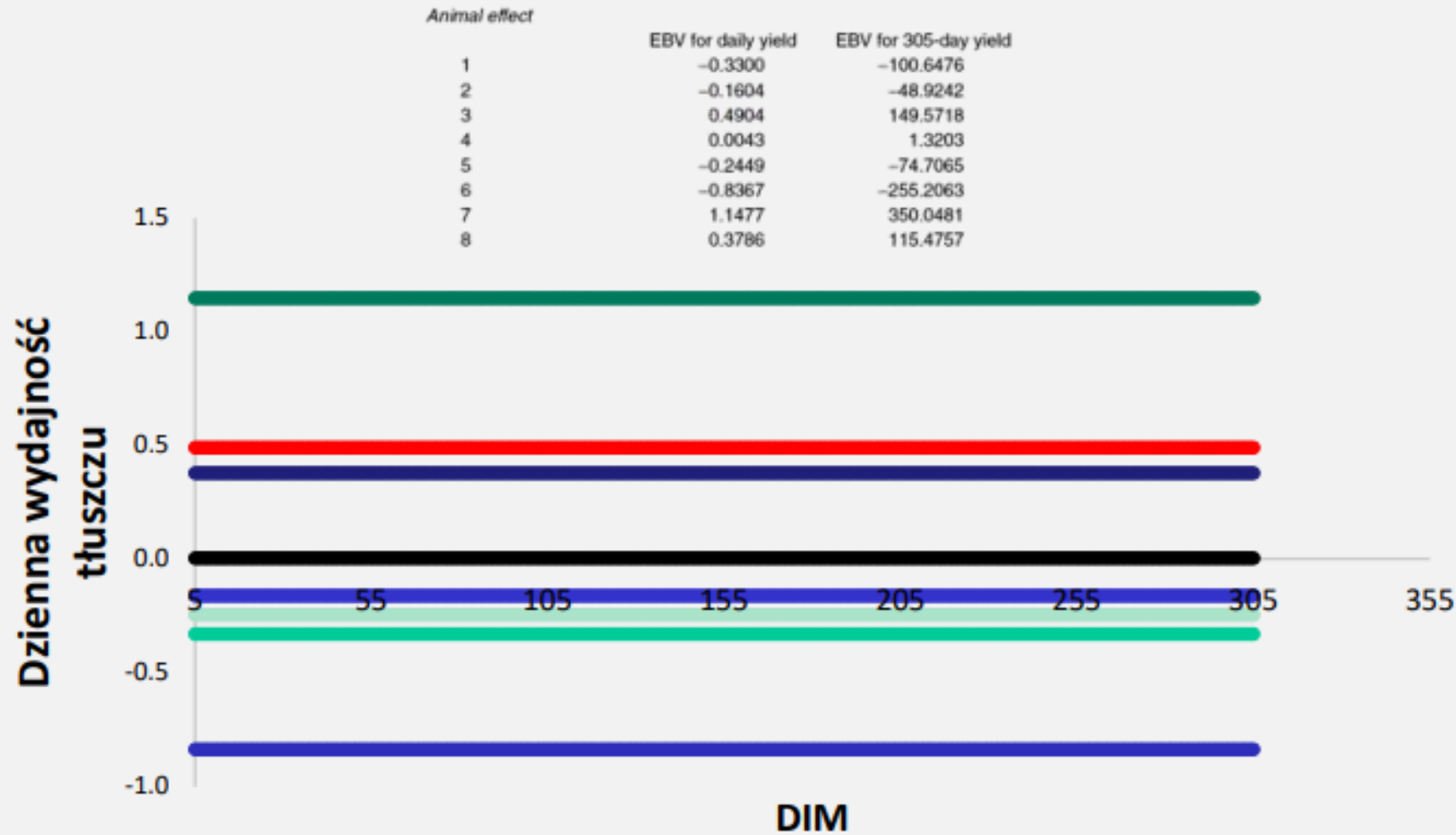
Animal effect

	EBV for daily yield	EBV for 305-day yield
1	−0.3300	−100.6476
2	−0.1604	−48.9242
3	0.4904	149.5718
4	0.0043	1.3203
5	−0.2449	−74.7065
6	−0.8367	−255.2063
7	1.1477	350.0481
8	0.3786	115.4757

Permanent environmental effects

4	−0.6156	−187.7634
5	−0.4151	−126.6150
6	−1.6853	−514.0274
7	2.8089	856.7092
8	−0.0928	−28.3035

Model regresji stałej – rozwiązania efektów losowych



- Wartość hodowlana stała w ciągu laktacji
- $EBV = u_1 = 305\text{-day yield} \rightarrow -0.3300 \cdot 305$
- $EBV \text{ np. do dnia } 100 \rightarrow -0.3300 \cdot 100$

Model regresji losowej

- Schaeffer and Dekkers (1994)
- Modelowanie przebiegu całej laktacji
- Wykorzystanie informacji o kowariancji pomiędzy poszczególnymi próbnymi udojami
- Różne korelacje w zależności od DIM
- Każda krowa → odrębna krzywa laktacji

Model regresji losowej – model

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk} \beta_k + \sum_{k=0}^{NR} \omega_{tjk} u_{jk} + \sum_{k=0}^{NP} \rho_{tjk} pe_{jk} + e_{tij}$$

- y_{tij} wydajność próbnego udoju t krowy j w i -tej klasie htd
- htd_i i -ta klasa stado-próbny_udój
- β_k k -ty współczynnik regresji (efekt stały)
- φ_{tjk} k -ty współczynnik wielomianu Legendre'a dla krowy j
- NF stopień wielomianu Legendre'a dla efektów stałych
- e_{tij} błąd dla rekordu t krowy j w i -tej klasie htd

Model regresji losowej – model

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk} \beta_k + \sum_{k=0}^{NR} \omega_{tjk} u_{jk} + \sum_{k=0}^{NP} \rho_{tjk} pe_{jk} + e_{tij}$$

- u_{jk} k -ty współczynnik regresji efektu addytywnie poligenicznego dla krowy j (efekt losowy)
- ω_{tjk} k -ty współczynnik wielomianu Legendre'a dla efektu addytywnie poligenicznego krowy j
- NR stopień wielomianu Legendre'a dla efektu addytywnie poligenicznego
- $var(u) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{G}$ $\mathbf{A} = N_{cows} \times N_{cows}$ $\mathbf{G} = NR \times NR$

Model regresji losowej – model

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk} \beta_k + \sum_{k=0}^{NR} \omega_{tjk} u_{jk} + \sum_{k=0}^{NP} \rho_{tjk} pe_{jk} + e_{tij}$$

- pe_{jk} k -ty współczynnik regresji efektu trwałego środowiskowego dla krowy j (efekt losowy)
- ρ_{tjk} k -ty współczynnik wielomianu Legendra'a dla efektu trwałego środowiskowego krowy j
- NP stopień wielomianu Legendre'a dla efektu trwałego środowiskowego
- $var(pe) = \mathbf{I} \otimes \mathbf{P}$ $\mathbf{I} = N_{animals} \times N_{animals}$ $\mathbf{P} = NP \times NP$

Model regresji losowej – struktura kowariancji

Macierz kowariancji fenotypowych próbnych udojów jednej krowy

$$V_y = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & r_{12}\sigma_1\sigma_2 & r_{13}\sigma_1\sigma_3 & \cdots & r_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ & \sigma_2^2 & r_{23}\sigma_2\sigma_3 & \cdots & r_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \text{symm.} & & \sigma_{n-1}^2 & r_{n-1,n}\sigma_{n-1}\sigma_n \\ & & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

- Wariancja próbnego udoju i : $\sigma^2 = \sigma_{yi}^2 = \sigma_{u_i}^2 + \sigma_{pe_i}^2 + \sigma_{e_i}^2$
- Korelacja pomiędzy próbnymi udojami i oraz j : $r_{ij} = \frac{\sigma_{u_{ij}} + \sigma_{pe_{ij}}}{\sqrt{\sigma_{yi}^2 \sigma_{yj}^2}}$

Model regresji losowej

- Model

$$y = Xb + Qu + Zpe + e$$

- MME

$$\begin{bmatrix} X^T R^{-1} X & X^T R^{-1} Q & X^T R^{-1} Z \\ Q^T R^{-1} X & Q^T R^{-1} Q + A^{-1} \otimes G^{-1} & Q^T R^{-1} Z \\ Z^T R^{-1} X & Z^T R^{-1} Q & Z^T Q^T R^{-1} Z + I \otimes P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ u \\ pe \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^T R^{-1} y \\ Q^T R^{-1} y \\ Z^T R^{-1} y \end{bmatrix}$$

Model regresji losowej – dane

DIM	Animals									
	4		5		6		7		8	
	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY
4	1	17.0	1	23.0	6	10.4	4	22.8	1	22.2
38	2	18.6	2	21.0	7	12.3	5	22.4	2	20.0
72	3	24.0	3	18.0	8	13.2	6	21.4	3	21.0
106	4	20.0	4	17.0	9	11.6	7	18.8	4	23.0
140	5	20.0	5	16.2	10	8.4	8	18.3	5	16.8
174	6	15.6	6	14.0			9	16.2	6	11.0
208	7	16.0	7	14.2			10	15.0	7	13.0
242	8	13.0	8	13.4					8	17.0
276	9	8.2	9	11.8					9	13.0
310	10	8.0	10	11.4					10	12.6

DIM, days in milk; HTD, herd–test–day.

Model regresji stałej – macierz wystąpień współczynników wielomianu

DIM	Animals									
	4		5		6		7		8	
	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY
4	1	17.0	1	23.0	6	10.4	4	22.8	1	22.2
38	2	18.6	2	21.0	7	12.3	5	22.4	2	20.0
72	3	24.0	3	18.0	8	13.2	6	21.4	3	21.0
106	4	20.0	4	17.0	9	11.6	7	18.8	4	23.0
140	5	20.0	5	16.2	10	8.4	8	18.3	5	16.8
174	6	15.6	6	14.0			9	16.2	6	11.0
208	7	16.0	7	14.2			10	15.0	7	13.0
242	8	13.0	8	13.4					8	17.0
276	9	8.2	9	11.8					9	13.0
310	10	8.0	10	11.4					10	12.6

DIM, days in milk; HTD, herd-test-day.

$$X_2 = N_{tds} \times NF$$

$$\text{dla } k=0 \quad \varphi(t) = 1$$

$$\text{dla } k=1 \quad \varphi(t) = DIM^*$$

$$\text{dla } k=2 \quad \varphi(t) = \frac{1}{2}(3DIM^{*2} - 1)$$

$$\text{dla } k=3 \quad \varphi(t) = \frac{1}{2}(5DIM^{*3} - 3DIM^*)$$

$$\text{dla } k=4 \quad \varphi(t) = \frac{1}{8}(35DIM^{*4} - 30DIM^{*2} + 3)$$

Unormowane współczynniki $\varphi(DIM^*)$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\varphi_0 \quad \sqrt{\frac{3}{2}}\varphi_1 \quad \sqrt{\frac{5}{2}}\varphi_2 \quad \sqrt{\frac{7}{2}}\varphi_3 \quad \sqrt{\frac{9}{2}}\varphi_4$$

0.7071	-12247	15811	-18704	2.1213
0.7071	-0.9525	0.6441	-0.0176	-0.6205
0.7071	-0.6804	-0.0586	0.7573	-0.7757
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.7071	0.6804	-0.0586	-0.7573	-0.7757
0.7071	0.9525	0.6441	0.0176	-0.6205
0.7071	12247	15811	18704	2.1213

krowa 4; próbny udój dla DIM=4

krowa 4; próbny udój dla DIM=38

krowa 4; próbny udój dla DIM=72

krowa 8; próbny udój dla DIM=242

krowa 8; próbny udój dla DIM=276

krowa 8; próbny udój dla DIM=310

Model regresji losowej – macierz wystąpień efektu u

DIM	Animals									
	4		5		6		7		8	
	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY	HTD	TDY
4	1	17.0	1	23.0	6	10.4	4	22.8	1	22.2
38	2	18.6	2	21.0	7	12.3	5	22.4	2	20.0
72	3	24.0	3	18.0	8	13.2	6	21.4	3	21.0
106	4	20.0	4	17.0	9	11.6	7	18.8	4	23.0
140	5	20.0	5	16.2	10	8.4	8	18.3	5	16.8
174	6	15.6	6	14.0			9	16.2	6	11.0
208	7	16.0	7	14.2			10	15.0	7	13.0
242	8	13.0	8	13.4					8	17.0
276	9	8.2	9	11.8					9	13.0
310	10	8.0	10	11.4					10	12.6

DIM, days in milk; HTD, herd-test-day.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_8 \end{bmatrix}$$

np. Q_6

$$Q = N_{tds} \times NR \cdot N_{cows}$$

Unormowane współczynniki $\omega(DIM^*)$

NR=3

$$\begin{matrix} \sqrt{1/2} \omega_0 & \sqrt{3/2} \omega_1 & \sqrt{5/2} \omega_2 \\ \begin{bmatrix} 0.7017 & -1.2247 & 1.5811 \\ 0.7017 & -0.9525 & 0.6441 \\ 0.7017 & -0.6804 & -0.0586 \\ 0.7017 & -0.4082 & -0.5271 \\ 0.7017 & -0.1361 & -0.7613 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

krowa 6; próbny udój dla DIM=4

krowa 6; próbny udój dla DIM=38

krowa 6; próbny udój dla DIM=72

krowa 6; próbny udój dla DIM=106

krowa 6; próbny udój dla DIM=140

Model regresji losowej – rozwiązania efektów stałych

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk} \beta_k + \sum_{k=0}^{NR} \omega_{tjk} u_{jk} + \sum_{k=0}^{NP} \rho_{tjk} pe_{jk} + e_{tij}$$

Effects	Solutions
<i>Herd-test-day</i>	
1	10.0862
2	7.5908
3	8.5601
4	8.2430
5	6.3161
6	3.0101
7	3.1085
8	3.1718
9	0.5044
10	0.0000
<i>Fixed regression</i>	
1	16.6384
2	-0.6253
3	-0.1346
4	0.3479
5	-0.4218

Model regresji losowej – rozwiązania efektów losowych

$$y_{tij} = htd_i + \sum_{k=0}^{NF} \varphi_{tjk} \beta_k + \sum_{k=0}^{NR} \omega_{tjk} u_{jk} + \sum_{k=0}^{NP} \rho_{tjk} pe_{jk} + e_{tij}$$

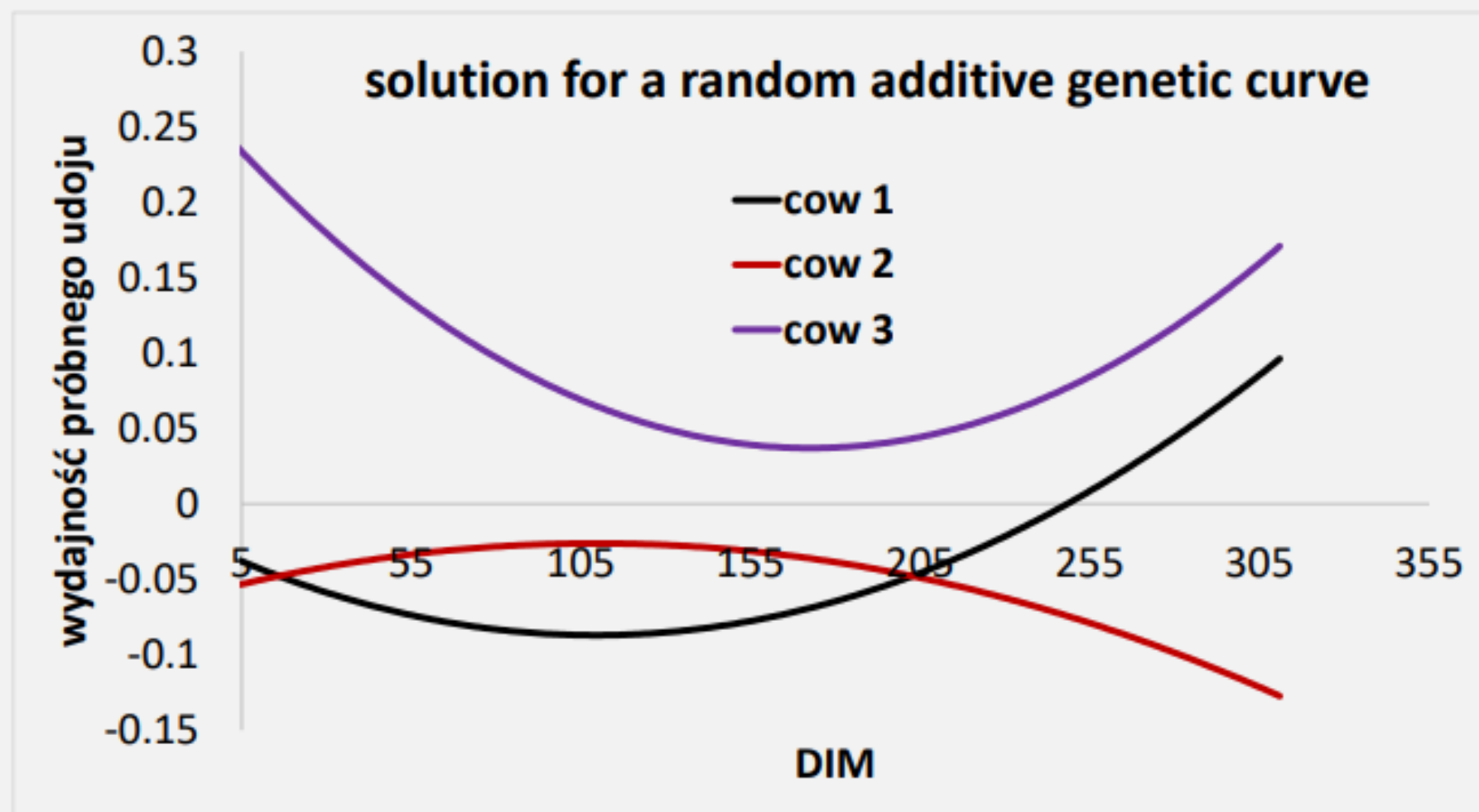
Animal	Regression coefficients			305-day breeding value	$\left[\sum_{i=1}^{305} \omega_0 \quad \sum_{i=1}^{305} \omega_1 \quad \sum_{i=1}^{305} \omega_2 \right] \begin{bmatrix} \hat{u}_{jk} \\ \hat{u}_{jk} \\ \hat{u}_{jk} \end{bmatrix}$
1	-0.0583	0.0552	0.0442	-12.3731	
2	-0.0728	-0.0305	-0.0244	-15.7347	
3	0.1311	-0.0247	0.0686	28.1078	
4	0.3445	0.0063	-0.3164	74.8132	
5	-0.4537	-0.0520	0.2798	-98.4153	
6	-0.5485	0.0730	0.1946	-118.4265	
7	0.8518	-0.0095	-0.3131	184.1701	
8	0.2209	0.0127	-0.0174	47.6907	

Permanent environmental effects

Cow	Regression coefficients			305-day solutions	$\left[\sum_{i=1}^{305} \rho_0 \quad \sum_{i=1}^{305} \rho_1 \quad \sum_{i=1}^{305} \rho_2 \right] \begin{bmatrix} \hat{pe}_{jk} \\ \hat{pe}_{jk} \\ \hat{pe}_{jk} \end{bmatrix}$
4	-0.6487	-0.3601	-1.4718	-138.4887	
5	-0.7761	0.1370	0.9688	-168.5531	
6	-1.9927	0.9851	-0.0693	-427.2378	
7	3.5188	-1.0510	-0.4048	756.9415	
8	-0.1013	0.2889	0.9771	-22.6619	

Model regresji losowej – rozwiązania ef. losowych

<i>Animal</i>	Regression coefficients			305-day breeding value
1	-0.0583	0.0552	0.0442	-12.3731
2	-0.0728	-0.0305	-0.0244	-15.7347
3	0.1311	-0.0247	0.0686	28.1078
4	0.3445	0.0063	-0.3164	74.8132
5	-0.4537	-0.0520	0.2798	-98.4153



Wymiary modelu – ocena łatwości wydajności mleka → DE 2020

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{Q}\mathbf{u} + \mathbf{Z}\mathbf{pe} + \mathbf{e}$$

- $\mathbf{y}$ wektor 429 985 545 x 1 obserwacje fenotypowe
- $\mathbf{u}$ wektor 37 354 579 x 3 predyktory wartości hodowlanych
- $\mathbf{e}$ wektor 429 985 545 x 1 predyktory efektów losowych błędu
- $\mathbf{Q}$ macierz 429 985 545 x 37 354 579*3
- $\mathbf{Z}$ macierz 429 985 545 x 37 354 579*3

Ocena rutynowa w Polsce

$$Y_{ijklm} = HTD_i + \sum_{n=1}^3 b_{jln} x_{jln} + \sum_{n=1}^3 a_{kln} z_{kln} + \sum_{n=1}^3 p_{kln} z_{kln} + e_{ijklm}$$

gdzie:

Y_{ijklm}	m-ta wydajność dzienna mleka, tłuszczu, białka, laktozy lub SCS k-tej krowy w l-tej laktacji, w i-tej podklasie dnia doju w stadzie, j-tej podklasie wieku ocielenia-sezonu ocielenia-odmiany-okresu czasu,
HTD_i	efekt losowy dnia doju w stadzie,
b_{jln}	współczynniki stałych regresji w podklasach wieku ocielenia-sezonu ocielenia-odmiany-okresu czasu,
a_{kln}	współczynniki losowych regresji dla efektu addytywnego genetycznego,
p_{kln}	współczynniki losowych regresji dla efektu trwałego środowiskowego,
x_{jln} i z_{kln}	współzmiennie obliczone na podstawie dnia laktacji,
e_{ijklm}	efekt błędu losowego.

Dziękuję za uwagę