



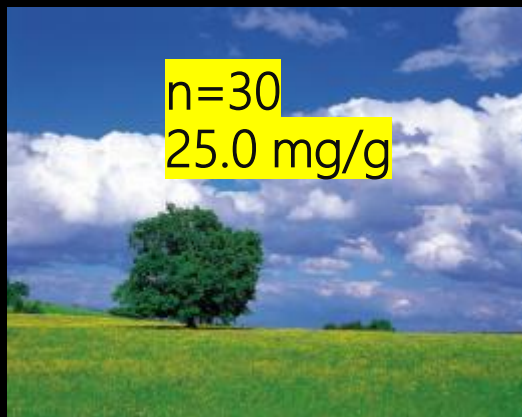
TESTOWANIE HIPOTEZ I ESTYMACJA PARAMETRÓW

Dawid Słomian

WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE



Omułek
słodkowodny
Hyridella menziesi



1. „Na oko” – różnica

2. UWAGA !!!

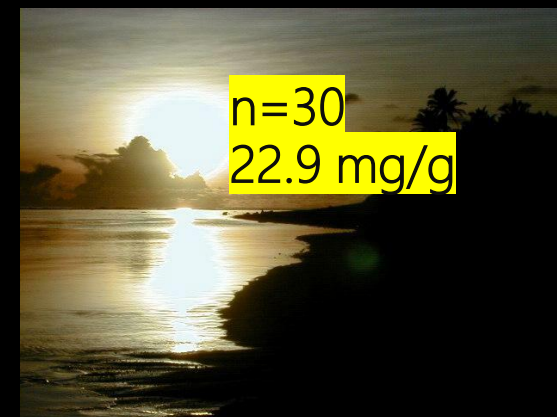
3. Błąd próbkowania

4. Estymatory różne

5. Parametry różne/równe

6. ???

7. Wnioskowanie statystyczne



WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE

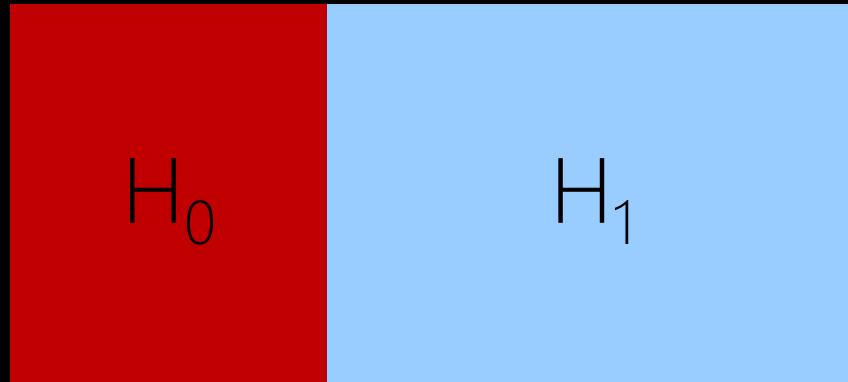


testowanie hipotez

estymacja parametrów

TESTOWANIE HIPOTEZ

H_0 - hipoteza zerowa H_1 - hipoteza alternatywna



- H_1 jest odwrotnością H_0
- H_0 zakłada „brak zmiany”, „brak efektu”
- Testowanie hipotez dotyczy przyjęcia lub odrzucenia H_0
- Sekwencyjne testowanie hipotez: $H_0 \rightarrow H_{1a} \rightarrow H_{1b}$

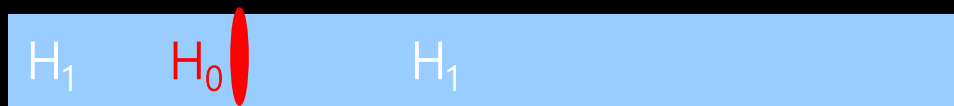
TESTOWANIE HIPOTEZ

np.

1 PARAMETR

H_0 : koncentracja lipidów w grupie doświadczalnej wynosi 25.0 mg/g

H_1 : koncentracja lipidów w grupie doświadczalnej jest inna



$H_0: k = 25.0$

$H_1: k \neq 25.0$

H_0 : koncentracja lipidów w grupie doświadczalnej przekracza 25.0 mg/g

H_1 : koncentracja lipidów w grupie doświadczalnej jest mniejsza lub równa 25.0 mg/g



$H_0: k > 25.0$

$H_1: k \leq 25.0$

TESTOWANIE HIPOTEZ

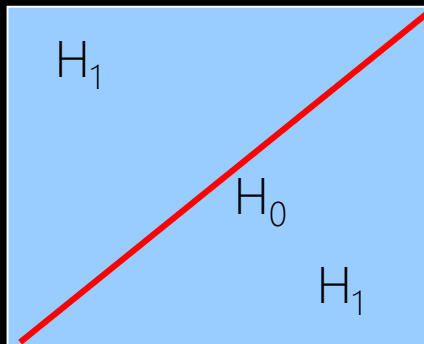
np.

2 PARAMETRY

H_0 : koncentracja lipidów w grupie doświadczalnej jest równa koncentracji w grupie kontrolnej

H_1 : koncentracja lipidów w grupach doświadczalnej i kontrolnej są różne

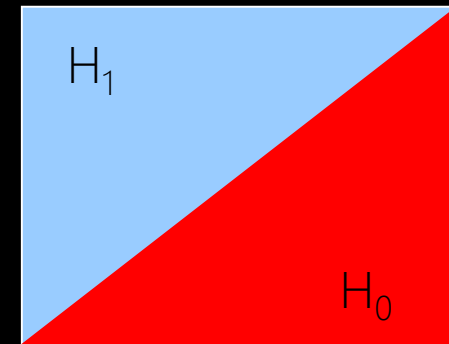
$$H_0: k_1 = k_2 \quad H_1: k_1 \neq k_2$$



H_0 : koncentracja lipidów w grupie doświadczalnej jest wyższa niż w grupie kontrolnej

H_1 : koncentracja lipidów w grupie doświadczalnej jest niższa lub równa grupie kontrolnej

$$H_0: k_1 > k_2 \quad H_1: k_1 \leq k_2$$



BŁĘDY ZWIĄZANE Z TESTOWANIEM HIPOTEZ

błędy		prawdziwa hipoteza	
		H_0	H_1
przyjęta hipoteza	H_0		β 
	H_1	α 	

α – błąd I-go rodzaju (*type I error*)

β – błąd II-go rodzaju (*type II error*)

BŁĄD I-GO RODZAJU

błędy	prawdziwa hipoteza	
	H_0	H_1
przyjęta hipoteza	H_0	
	H_1	

- prawdopodobieństwo błędnego odrzucenia prawdziwej H_0
- prawdopodobieństwo zaobserwowania próby danych | H_0 jest prawdziwa
- poziom istotności testu (*significance level*)
- P wartość (*P value*)
- np. jeżeli $\alpha=0.05$ to na 100 testów w 5 niepotrzebnie odrzucono H_0
- kontrolujemy w czasie testowania

BŁĄD II-GO RODZAJU

błędy		prawdziwa hipoteza	
		H_0	H_1
przyjęta hipoteza	H_0		
	H_1		

- prawdopodobieństwo odrzucenie prawdziwej H_1
- $1-\beta$ – moc testu (power)
- określenie mocy: symulacje, numerycznie
- zależy od informatywności próby danych: liczebność, struktura, różnica pomiędzy H_0 a H_1

ETAPY TESTOWANIA HIPOTEZ

1. Określenie hipotez H_0 i H_1

$$H_0: k_1 \leq k_2 \quad H_1: k_1 > k_2$$

2. Ustalenie poziomu istotności

- teoretycznego maksymalnego błędu α pozwalającego na odrzucenie H_0
- określenie maksymalnego poziomu nieścisłości wnioskowania statystycznego

$$\alpha_{\text{MAX}} = 0.05$$

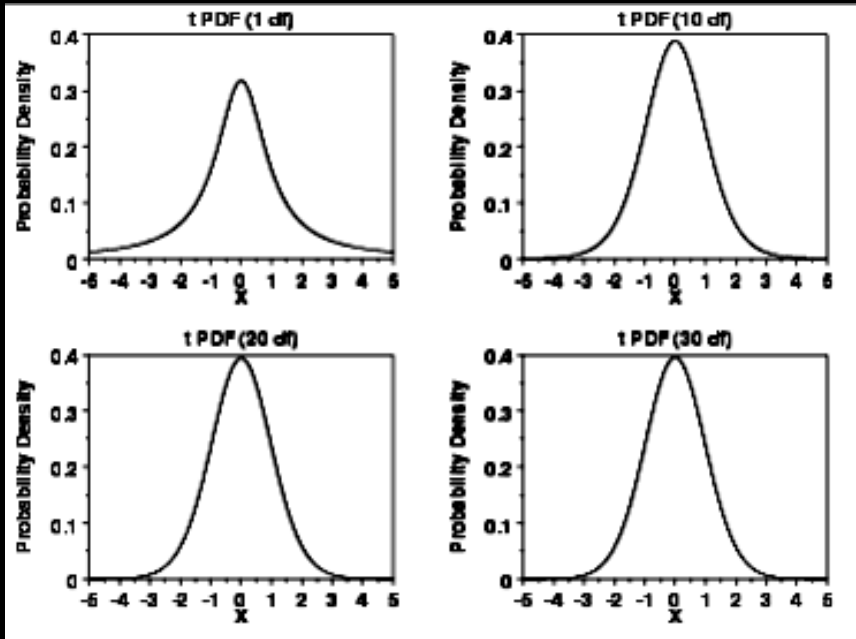
3. Wybór i obliczenie wartości testu statystycznego

$$t = \frac{\hat{k}_1 - \hat{k}_2}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}}$$

ETAPY TESTOWANIA HIPOTEZ

4. Określenie rozkładu testu statystycznego

- asymptotyczny ($\sim$ przybliżony) rozkład opisujący prawdopodobieństwo uzyskania danej wartości testu przy założeniu, że H_0 jest prawdziwa
- potrzebne do obliczenia błędu I-go rodzaju α
- kształt rozkładu zależy od: rodzaju testu, liczby stopni swobody



$$t = \frac{\hat{k}_1 - \hat{k}_2}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}} \sim t_{N_1 + N_2 - 2}$$

ETAPY TESTOWANIA HIPOTEZ

5. Na podstawie 3. i 4. obliczenie poziomu błęd α dla danego eksperymentu (wartość P , P value) $\rightarrow$ określa prawdopodobieństwo otrzymania wartości testu równej lub wyższej niż wartość uzyskanej w danym eksperymencie $\rightarrow$ przy założeniu, że H_0 jest prawdziwa

$$t \rightarrow \alpha_T = P = 0.02$$

6. **Decyzja dotycząca przyjęcia lub odrzucenia H_0** $\rightarrow$ im niższa wartość P tym większe przesłanki do odrzucenia H_0

np. $\alpha_{MAX} = 0.05$ $t = 2.8$ $\rightarrow \alpha_T = P = 0.02$ H_0 H_1 ??

np. $\alpha_{MAX} = 0.05$ $t = 1.3$ $\rightarrow \alpha_T = P = 0.21$ H_0 H_1 ??

TESTOWANIE WIELOKROTNE



$H_0: k_1 \leq k_2 / H_1: k_1 > k_2 \rightarrow \alpha_{MAX}=0.05 \rightarrow t \rightarrow \alpha_T \rightarrow H_0/H_1 \rightarrow 5\%$



$H_0: k_1 \leq k_2 / H_1: k_1 > k_2 \rightarrow \alpha_{MAX}=0.05 \rightarrow t \rightarrow \alpha_T \rightarrow H_0/H_1 \rightarrow 5\%$



$H_0: k_1 \leq k_2 / H_1: k_1 > k_2 \rightarrow \alpha_{MAX}=0.05 \rightarrow t \rightarrow \alpha_T \rightarrow H_0/H_1 \rightarrow 5\%$



...



$H_0: k_1 \leq k_2 / H_1: k_1 > k_2 \rightarrow \alpha_{MAX}=0.05 \rightarrow t \rightarrow \alpha_T \rightarrow H_0/H_1 \rightarrow 5\%$



całkowity błąd I-go rodzaju $\alpha_{max} \approx 0.05 \cdot 10 = 50\%$



TESTOWANIE WIELOKROTNE

Korekta Bonferroniego → testy niezależne od siebie



$$\alpha_{MAX^*} = \alpha_{MAX} / N \rightarrow \alpha_{MAX^*} = 0.05 / 10 \rightarrow \alpha_{MAX^*} = 0.005$$



$$\alpha_{MAX^*} = \alpha_{MAX} / N \rightarrow \alpha_{MAX^*} = 0.05 / 10 \rightarrow \alpha_{MAX^*} = 0.005$$

...



$$\alpha_{MAX^*} = \alpha_{MAX} / N \rightarrow \alpha_{MAX^*} = 0.05 / 10 \rightarrow \alpha_{MAX^*} = 0.005$$

całkowity błąd I-go rodzaju $\alpha_{max} \approx 0.005 * 10 = 5\%$

TESTOWANIE WIELOKROTNE

Korekta False Discovery Rate (FDR) → testy zależne od siebie

błędy		prawdziwa hipoteza	
		H_0	H_1
przyjęta hipoteza	H_0		
	H_1		

$$\text{FDR} = E \left[\frac{\text{blue sad face}}{\text{blue sad face} + \text{yellow happy face}} \right]$$

WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE



testowanie hipotez

estymacja parametrów

BŁĄD STANDARDOWY

Jak dokładny jest dany estymator ???



błąd standardowy

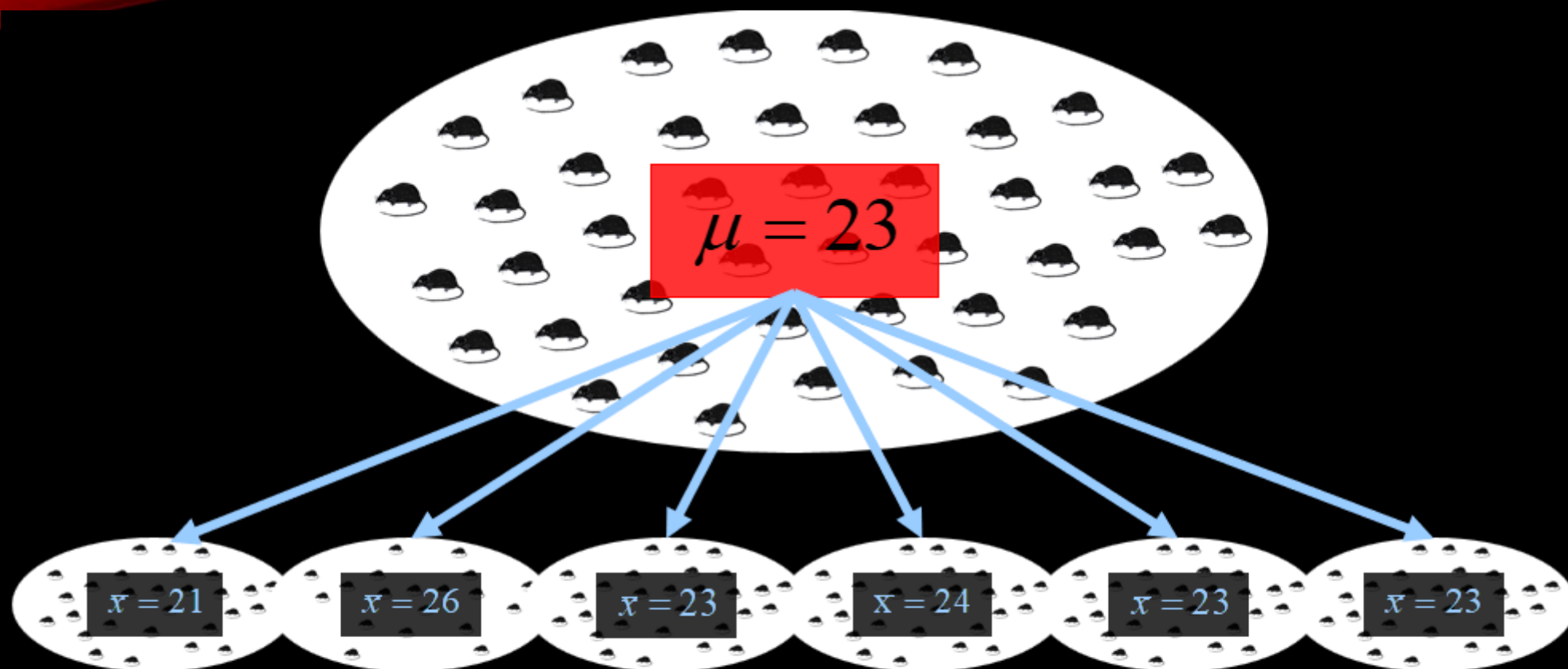


przedział ufności



$\bar{X}$

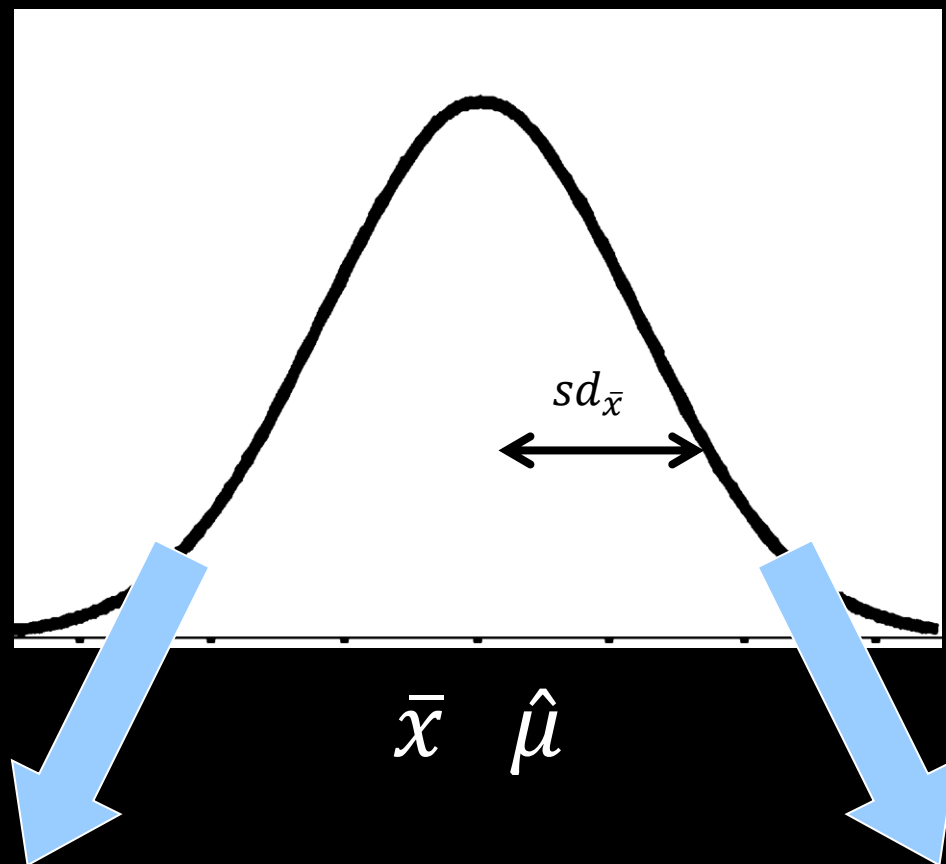
BŁĄD STANDARDOWY



Błąd standardowy estymatora:

odchylenie standardowe rozkładu estymatora

BŁĄD STANDARDOWY NA PRZYKŁADZIE ESTYMATORA ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ



Jaki jest rozkład $\bar{x}$?

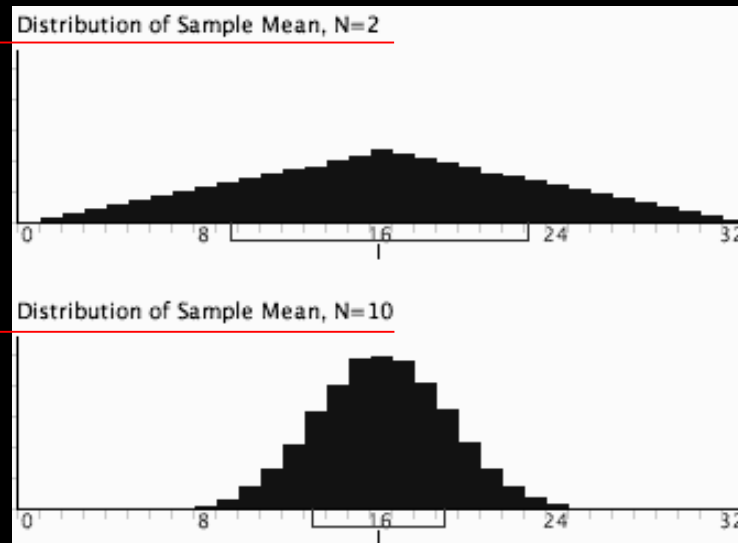
Jak obliczyć $sd_{\bar{x}}$?

BŁĄD STANDARDOWY NA PRZYKŁADZIE ESTYMATORA ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

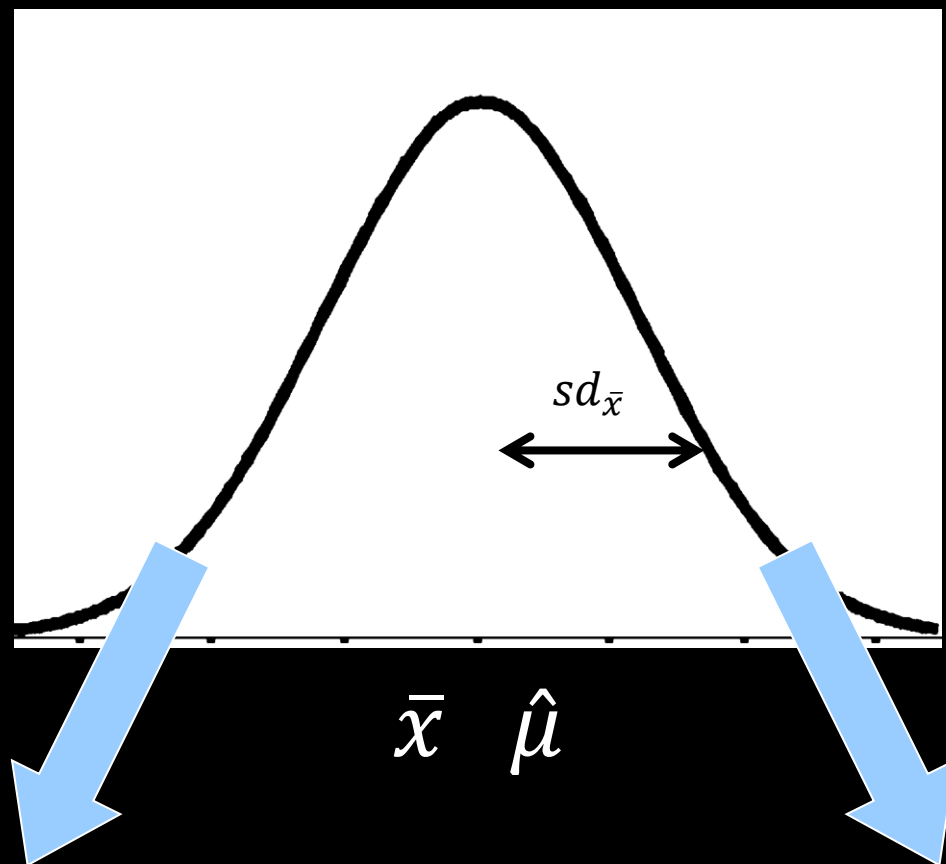
Jaki rozkład ma estymator średniej?

Dla dużych prób danych (N):

- rozkład estymatora średniej zbliża się do rozkładu Normalnego
- estymator średniej zbliża się do prawdziwej wartości parametru próby
- niezależnie od rozkładu obserwacji w próbie danych ☺



BŁĄD STANDARDOWY NA PRZYKŁADZIE ESTYMATORA ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ



Jaki jest rozkład $\bar{x}$?

Jak obliczyć $sd_{\bar{x}}$?

BŁĄD STANDARDOWY NA PRZYKŁADZIE ESTYMATORA ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

Jak obliczyć odchylenie standardowe rozkładu estymatora średniej (bez konieczności pobierania wielu prób danych) ?

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$

Odchylenie standardowe w próbie danych: $s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$

Liczebność próby danych

błąd standardowy estymatora średniej

BŁĄD STANDARDOWY INNYCH ESTYMATORÓW

Błąd standardowy estymatora prawdopodobieństwa

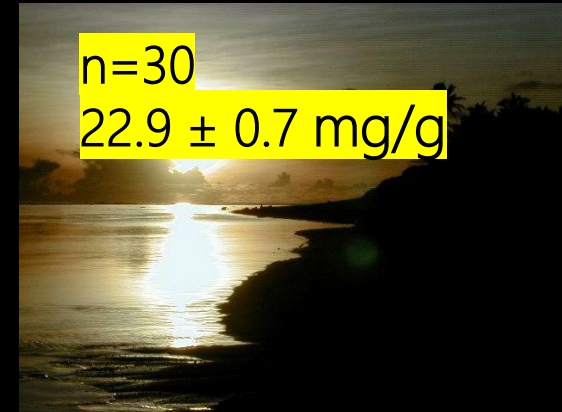
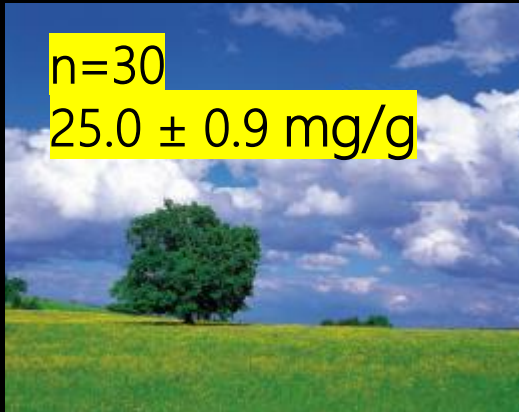
$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{N}}$$

Błąd standardowy współczynnika regresji

$$S_{b_1} = \frac{\sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{N - 2}}}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

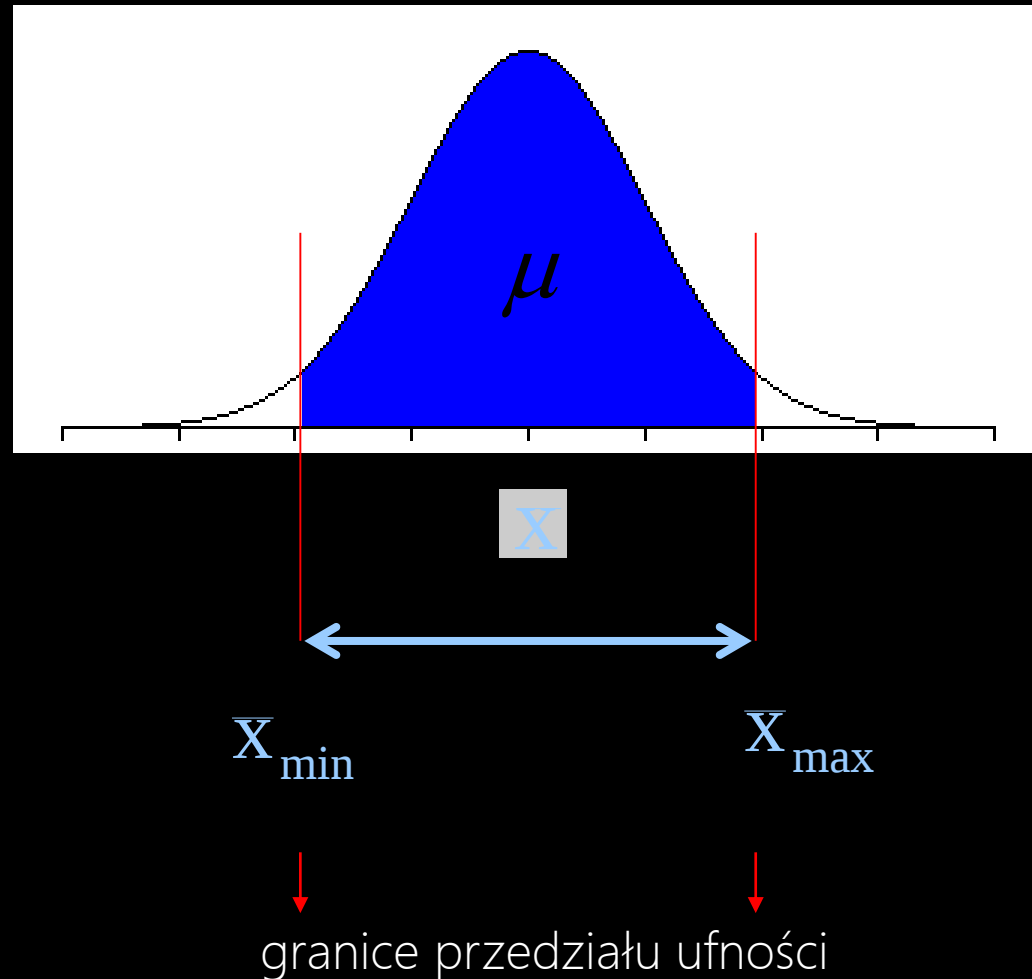
Co wpływa na wielkość
błędu standardowego?

WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE



PRZEDZIAŁ UFNOŚCI

Przedział ufności estymatora: przedział w jakim z określonym prawdopodobieństwem znajduje się prawdziwa wartość parametru



PRZEDZIAŁ UFNOŚCI

Jak obliczyć granice przedziału ufności ?

1. Wariancja próby znana lub próba bardzo liczna

$$\bar{X}_{\min} = \bar{X} - \underline{z_{\alpha}} S_{\bar{x}} \qquad \bar{X}_{\max} = \bar{X} + \underline{z_{\alpha}} S_{\bar{x}}$$

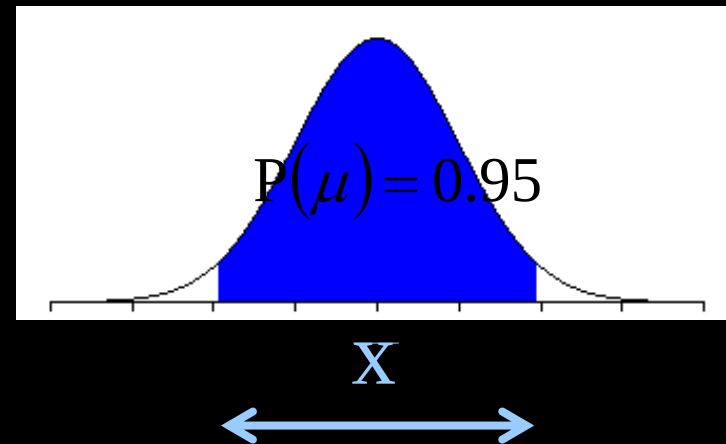
2. Wariancja próby nieznana = obliczana na podstawie obserwacji w próbie

$$\bar{X}_{\min} = \bar{X} - \underline{t_{\alpha, N-1}} S_{\bar{x}} \qquad \bar{X}_{\max} = \bar{X} + \underline{t_{\alpha, N-1}} S_{\bar{x}}$$

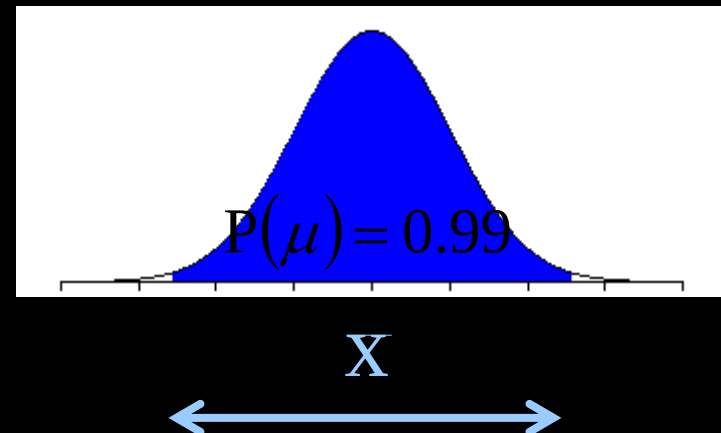
PRZEDZIAŁ UFNOŚCI

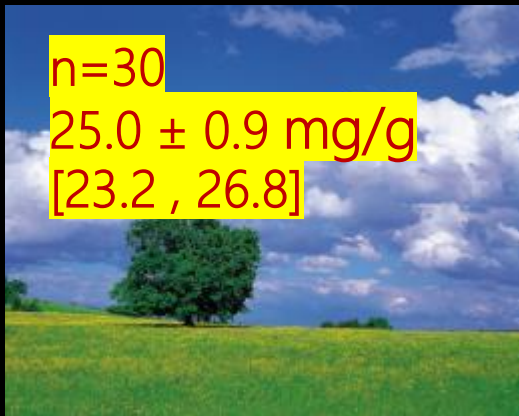
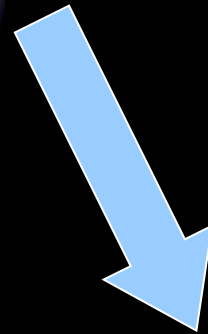
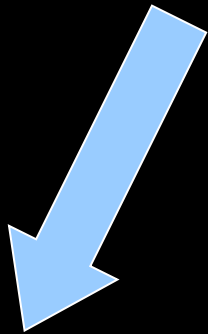
Prawdopodobieństwo wystąpienia prawdziwej średniej w przedziale ufności, a długość przedziału

1. Przedział ufności 95%

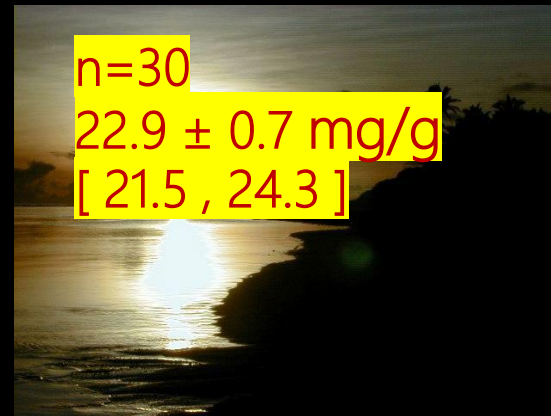


2. Przedział ufności 99%



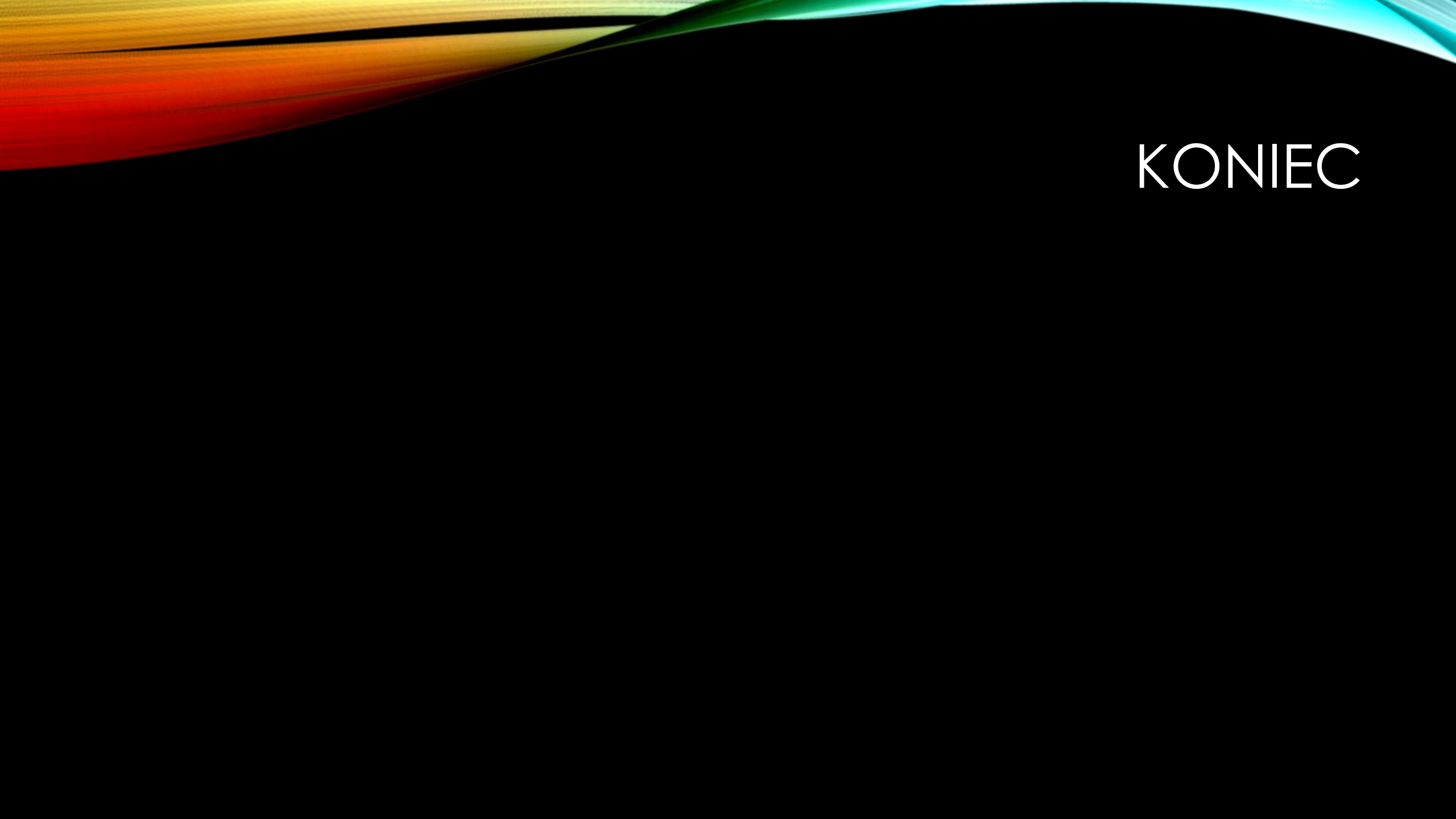


n=30
 $25.0 \pm 0.9 \text{ mg/g}$
[23.2 , 26.8]



n=30
 $22.9 \pm 0.7 \text{ mg/g}$
[21.5 , 24.3]





KONIEC