



NAJCZĘŚCIEJ WYKORZYSTYWANE TESTY STATYSTYCZNE I

Dawid Słomian

WSTĘP

- Test t
- Test Manna-Whitney'a
- Test Wilcoxona

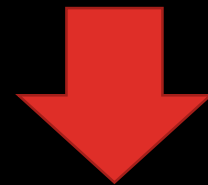
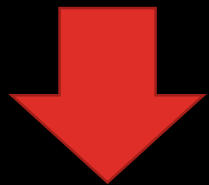


- Zakres zastosowania
- Definicja
- Przykład

WSTĘP

Hipotezy

Próba danych



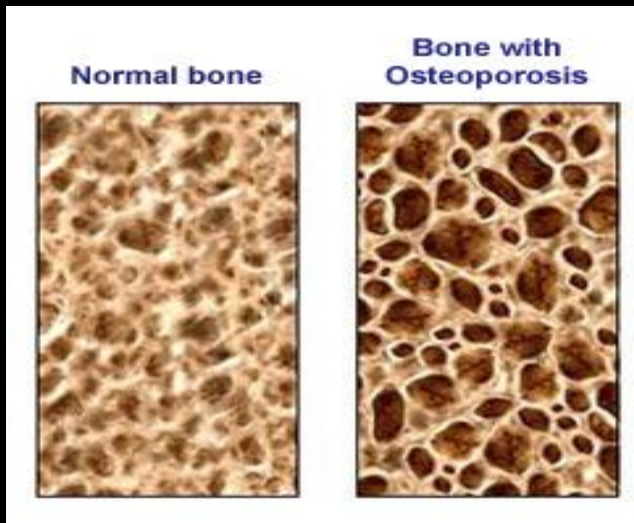
Test

TEST T

- Porównanie średnich arytmetycznych
- Dane ciągłe
- Rozkład normalny
- Podobne wariancje
- Warianty testu:
 - Pojedyncza próba $H_0: \mu = 1.0$
 - Dwie niezależne próby $H_0: \mu_A = \mu_B$
 - Dwie sparowane próby $H_0: \mu_A = \mu_B$

TEST T – POJEDYNCZA PRÓBA

- Badanie osteoporozy
- Medical Research Council, Cambridge
- Gęstość kości [g/cm²] 40 zdrowych osób dorosłych



BMD	SEX
0.97	1
0.73	1
0.87	1
0.94	1
1.02	1
0.76	1
0.78	1
1.01	1
0.82	1
0.76	1
0.87	1
0.72	1
...	
0.91	2
1.02	2
0.87	2

TEST T – POJEDYNCZA PRÓBA

- Określenie hipotez H_0 i H_1

H_0 : średnia gęstość kości w populacji wynosi 1.0 g/cm²

H_1 : średnia gęstość kości w populacji różni się od 1.0 g/cm²

$H_0: \mu = 1.0$ $H_1: \mu \neq 1.0$

- Ustalenie poziomu istotności

$$\alpha_{MAX} = 0.05$$

- Wybór i obliczenie wartości testu statystycznego

$$t = \frac{\bar{x} - 1.0}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2}} = \frac{\bar{x} - 1.0}{\frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{N}}} = \frac{0.85 - 1.0}{\frac{0.1040}{\sqrt{40}}} = -9.2434$$

TEST T – POJEDYNCZA PRÓBA

- Określenie rozkładu testu

$$t = \frac{\bar{x} - 1.0}{\sqrt{\hat{\sigma}_x^2}} = \frac{\bar{x} - 1.0}{\frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{N}}} \sim t_{N-1}$$

- Obliczenie wartości
 $\alpha_t = 0.00000000$

- Decyzja

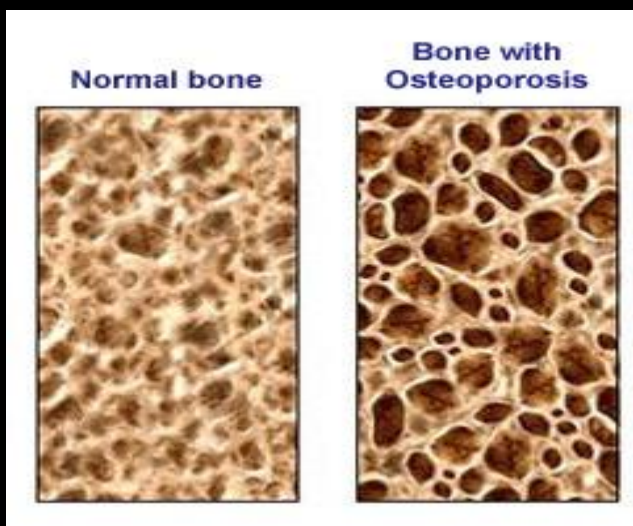
- $\alpha_t < \alpha_{\max}$

~~H_0~~ H_1

średnia gęstość kości w populacji różni się od 1.0 g/cm²

TEST T – DWIE NIEZALEŻNE PRÓBY

- Badanie osteoporozy
- Medical Research Council, Cambridge
- Gęstość kości [g/cm²] 40 zdrowych osób dorosłych
- Wartości znane dla mężczyzn i kobiet



BMD	SEX
0.97	1
0.73	1
0.87	1
0.94	1
1.02	1
0.76	1
0.78	1
1.01	1
0.82	1
0.76	1
0.87	1
0.72	1
...	
0.91	2
1.02	2
0.87	2

TEST T – DWIE NIEZALEŻNE PRÓBY

- Określenie hipotez H_0 i H_1

H_0 : gęstość kości kobiet jest taka sama jak mężczyzn

H_1 : gęstość kości kobiet jest różna niż mężczyzn

$H_0: \mu_K = \mu_M$

$H_1: \mu_K \neq \mu_M$

- Ustalenie poziomu istotności

$$\alpha_{MAX} = 0.05$$

- Wybór i obliczenie wartości testu statystycznego

$$t = \frac{\bar{x}_M - \bar{x}_K}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_M^2}{N_M} + \frac{\hat{\sigma}_K^2}{N_K}}}$$

TEST T – DWIE NIEZALEŻNE PRÓBY

- Określenie rozkładu testu

$$t = \frac{\bar{x}_M - \bar{x}_K}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_M^2}{N_M} + \frac{\hat{\sigma}_K^2}{N_K}}} \sim t_{(N_M-1)+(N_K-1)}$$

- Obliczenie wartości $\alpha_{\dagger}$

$$\alpha_{\dagger} = 0.0466$$

- Decyzja

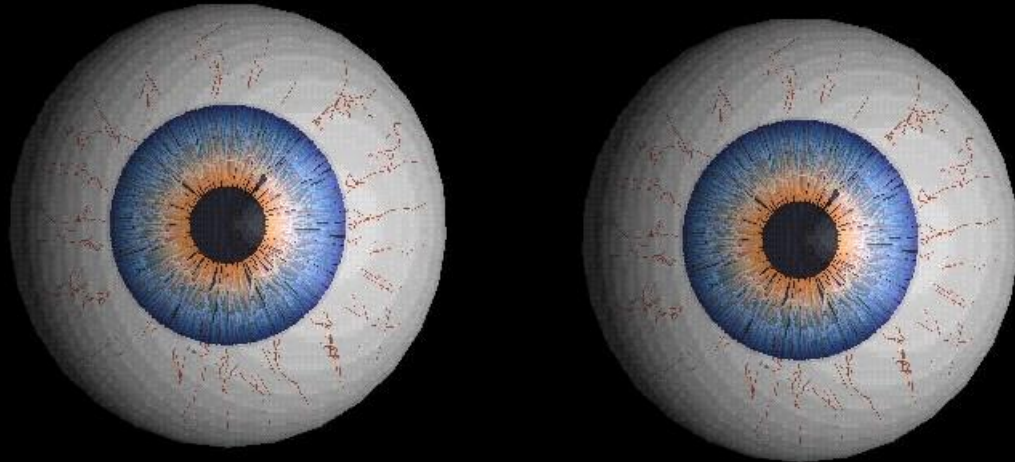
$$\alpha_{\dagger} < \alpha_{\max}$$

~~H₀~~ H₁

gęstość kości u mężczyzn jest inna niż u kobiet, ..., jest wyższa

TEST T – DWIE SPAROWANE PRÓBY

- Badanie ciśnienia w gałce ocznej
- Ciśnienie w 2 gałkach tej samej osoby
- Podział oczu pod względem grubości rogowki (Low CCT i high CCT)



Low CCT	High CCT
20.0	14.3
13.9	13.8
18.3	15.8
21.1	33.4
20.1	20.3
24.4	19.9
20.2	14.3
11.6	11.4
28.8	25.1
18.5	24.1

TEST T – DWIE SPAROWANE PRÓBY

- Określenie hipotez H_0 i H_1

H_0 : ciśnienie w gałce ocznej nie zależy od grubości rogówki

H_1 : ciśnienie w gałce ocznej zależy od grubości rogówki

$H_0: \mu_L = \mu_H$ $H_1: \mu_L \neq \mu_H$

- Ustalenie poziomu istotności

$$\alpha_{MAX} = 0.05$$

- Wybór i obliczenie wartości testu statystycznego

$$t = \frac{\bar{D}\sqrt{N}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (D_i - \bar{D})^2}{N-1}}}, \quad \bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{1i} - x_{2i})}{N}$$

TEST T – DWIE SPAROWANE PRÓBY

- Wybór i obliczenie wartości testu statystycznego

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{1i} - x_{2i})}{N} = \frac{4.5}{10} = 0.45$$

$$t = \frac{\bar{D}\sqrt{N}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (D_i - \bar{D})^2}{N-1}}} = \frac{0.45\sqrt{10}}{\sqrt{\frac{288.21}{10-1}}} = 0.25$$

TEST T – DWIE SPAROWANE PRÓBY

- Określenie rozkładu testu

$$t = \frac{\bar{D}\sqrt{N}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (D_i - \bar{D})^2}{N-1}}} \sim t_{N-1}$$

- Obliczenie wartości α_t

$$\alpha_t = 0.8071$$

- Decyzja

$$\alpha_t > \alpha_{\max}$$

H_0 ~~H_1~~

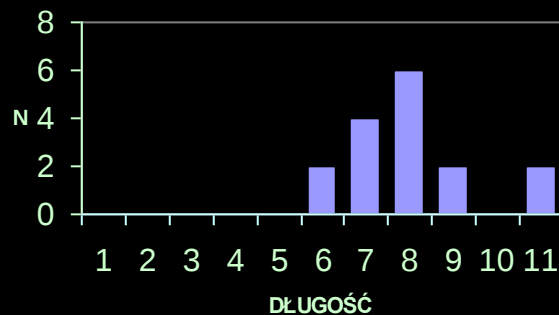
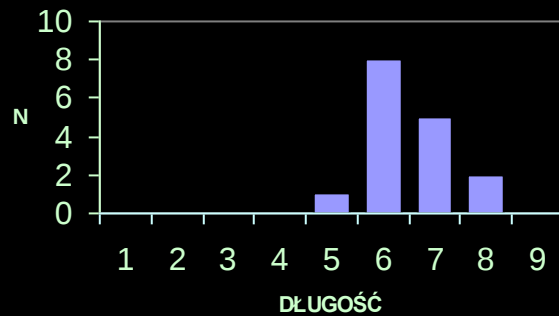
ciśnienie w gałce ocznej nie zależy od grubości rogówki

TEST MANNA – WHITNEY'A

- Porównanie średnich arytmetycznych
- Dane ciągłe lub porządkowe (rangi)
- Dane nie mają rozkładu normalnego
- Dwie niezależne próby

TEST MANN – WHITNEY' A

- Długość krewetki w zależności od zasolenia wody
- Długość krewetki [mm] w wieku 4 tygodni



ŚREDNIE	WYSOKIE
5.5	6.0
6.0	7.0
5.0	7.5
7.0	6.0
5.5	7.5
6.0	8.0
7.0	11.0
6.0	9.0
8.0	8.0
7.0	11.0
6.0	8.0
7.0	8.0
6.0	7.0
8.0	7.0
6.0	7.0
7.0	9.0

TEST MANNA – WHITNEY' A

- Określenie hipotez H_0 i H_1

H_0 : długość krewetki nie zależy do zasolenia wody

H_1 : długość krewetki zależy od zasolenia wody

$H_0: \mu_H = \mu_M$ $H_1: \mu_H \neq \mu_M$

- Ustalenie poziomu istotności

- $\alpha_{MAX} = 0.05$

- Wybór i obliczenie wartości testu statystycznego

$$U = \min \left(n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - \sum_{i=1}^{n_2} r_{2i}, \quad n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - \sum_{i=1}^{n_1} r_{1i} \right)$$

TEST MANNA – WHITNEY' A

- Wybór i obliczenie wartości testu statystycznego

$$U = \min \left(n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - \sum_{i=1}^{n_2} r_{2i}, n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - \sum_{i=1}^{n_1} r_{1i} \right)$$

$$U = \min \left(16 \cdot 16 + \frac{16(16 + 1)}{2} - 182, 16 \cdot 16 + \frac{16(16 + 1)}{2} - 342 \right) = \min(46, 210)$$

$$U = 46$$

TEST MANNA – WHITNEY' A

- Określenie rozkładu testu
- Test nieparametryczny – brak rozkładu
- **Dla $n_1 n_2 > 20$ – aproksymowany przez rozkład normalny:**

$$U \sim N(\mu_U, \sigma_U^2) \quad \rightarrow \text{brak tablic}$$

$$Z = \frac{U - \mu_U}{\sqrt{\sigma_U^2}} = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}} \sim N(0,1) \quad \rightarrow \text{tablice}$$

TEST MANNA – WHITNEY' A

- Określenie rozkładu testu

$$z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}} = \frac{46 - \frac{16 * 16}{2}}{\sqrt{\frac{16 * 16 (33)}{12}}} = 3.09 \sim N(0,1)$$

- Obliczenie wartości α_t

$$\alpha_t = 0.002$$

- lub porównanie z wartością krytyczną:

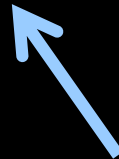
$$U_{\alpha=0.05, n_1=16, n_2=16} = 181 \quad U_t = 46$$

TEST MANNA – WHITNEY'A

- Decyzja
- $\alpha_{\dagger} < \alpha_{\max}$

$$U_{\dagger} < U$$

~~H_0~~ H_1



UWAGA !!!

długość krewetki zależy od zasolenia wody

TEST WILCOXONA – ZAKRES STOSOWALNOŚCI

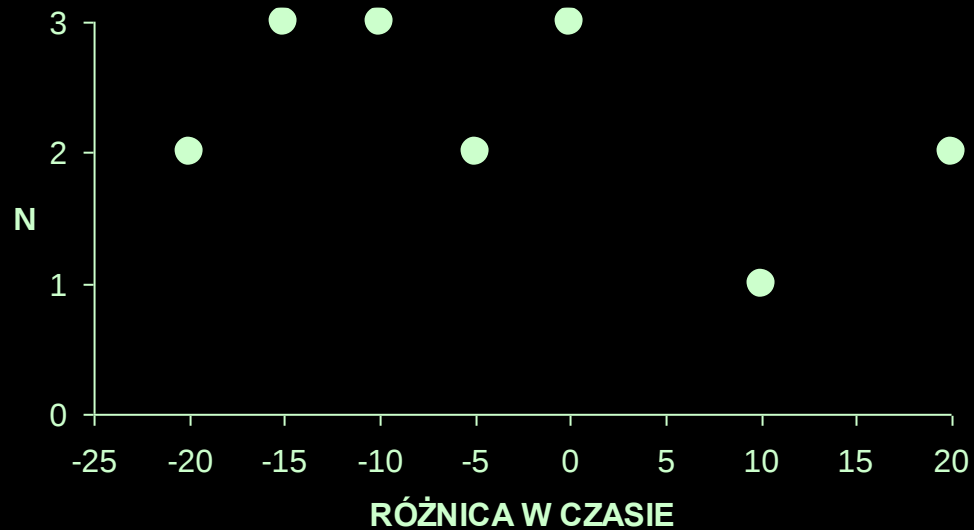
- Test nieparametryczny
- Dane ciągłe lub porządkowe (rangi)
- Dane nie mają rozkładu normalnego
- Porównywane dwu zależnych = sparowanych prób danych

TEST WILCOXONA

- Próba danych – zachowanie się pokarmowe owiec
- Dane zebrano w latach 1994-1996 w stadzie owiec utrzymywanym u podnóża Rocky Mountains w Kanadzie
- Różnice w czasie pasienia się owcy z jagnięciem i bez
- % czasu spędzanego na pasieniu się

NR OWCY	BEZ JAGNIĘCIA	Z JAGNIĘCIEM
1	72.00	55.50
2	62.35	43.80
3	55.77	66.80
4	59.98	68.00
5	51.60	57.88
6	61.48	61.90
7	52.57	45.40
8	52.50	56.67
9	56.43	73.30
10	60.13	77.50
11	48.60	63.53
12	42.90	54.50
13	53.50	55.58
14	70.43	91.10
15	47.10	64.05
16	50.08	71.40

TEST WILCOXONA



NR OWCY	BEZ JAGNIĘCIA	Z JAGNIĘCIEM
1	72.00	55.50
2	62.35	43.80
3	55.77	66.80
4	59.98	68.00
5	51.60	57.88
6	61.48	61.90
7	52.57	45.40
8	52.50	56.67
9	56.43	73.30
10	60.13	77.50
11	48.60	63.53
12	42.90	54.50
13	53.50	55.58
14	70.43	91.10
15	47.10	64.05
16	50.08	71.40

TEST WILCOXONA

- Określenie hipotez H_0 i H_1

H_0 : czas pasienia się owcy nie zależy od obecności jagnięcia

H_1 : czas pasienia się owcy zależy od obecności jagnięcia

$H_0: \mu_J = \mu_B$ $H_1: \mu_J \neq \mu_B$

- Ustalenie poziomu istotności

$$\alpha_{MAX} = 0.05$$

- Wybór i obliczenie wartości testu statystycznego

$$W = \min \left(\sum_{i=1}^{n_1} r_i^-, \sum_{i=n_1}^{N-n_1} r_i^+ \right)$$

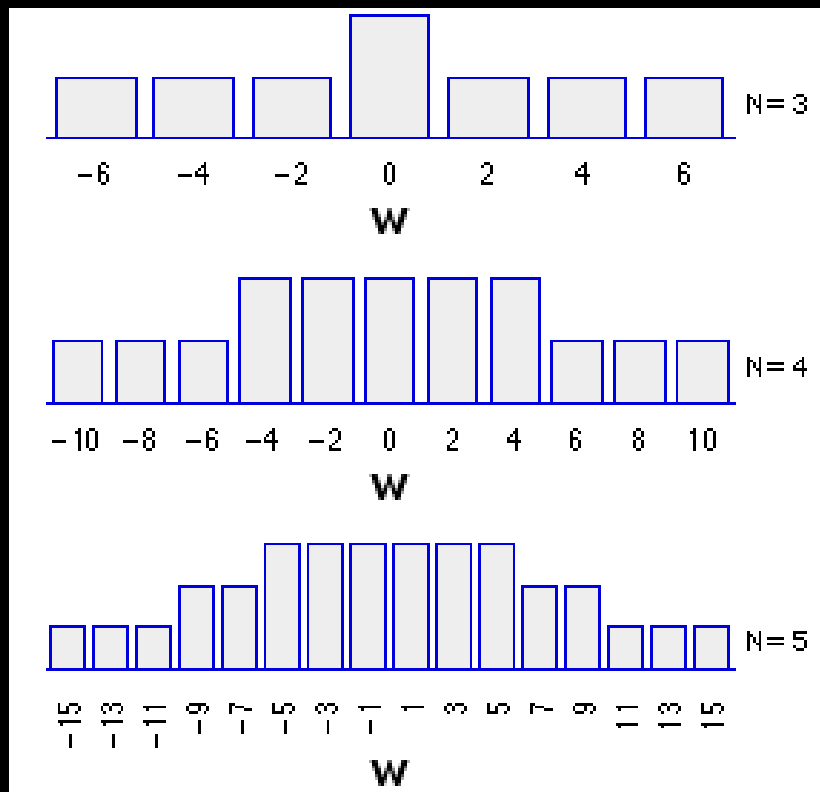
TEST WILCOXONA

- Wybór i obliczenie wartości testu statystycznego

$$W = \min\left(\sum_{i=1}^{n_1} r_i^-, \sum_{i=n_1}^{N-n_1} r_i^+\right) = \min(107, 29) = 29$$

TEST WILCOXONA

- Określenie rozkładu testu
- Test nieparametryczny – brak rozkładu
- Dla $N > 15$ – aproksymowany przez rozkład normalny:



$$W \sim N(\mu_W, \sigma_W^2)$$

$$Z = \frac{W - \mu_W}{\sqrt{\sigma_W^2}} \sim N(0,1)$$

$$Z = \frac{W - \frac{N(N+1)}{4}}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}} \sim N(0,1)$$

$$Z = \frac{29 - \frac{16 \cdot 17}{4}}{\sqrt{\frac{16 \cdot 17 \cdot 33}{24}}} = -2.02 \sim N(0,1)$$

TEST WILCOXONA

- Obliczanie wartości $\alpha_{\dagger}$

$$\alpha_{\dagger} = 0.0437$$

- Lub porównanie z wartością krytyczną

$$W_{\alpha=0.05, N=16} = 29 \quad W_t = 29$$

- Decyzja

- $\alpha_{\dagger} < \alpha_{\max}$

$$W_{\dagger} = W$$

~~H_0~~

H_1

Pasienie się owcy zależy od obecności jagnięcia



Porównanie dwóch prób



Próby zależne



Rozkład inny niż normalny



Test Wilcoxona



```
graph TD; A[Porównanie dwóch prób] --> B[Próby niezależne]; B --> C[Rozkład inny niż normalny]; C --> D[Test Manna-Whitney'a];
```

Porównanie dwóch prób



Próby niezależne



Rozkład inny niż normalny



Test Manna-Whitney'a



```
graph TD; A[Porównanie dwóch prób] --> B[Próby zależne]; B --> C[Rozkład normalny]; C --> D[Test t];
```

Porównanie dwóch prób



Próby zależne



Rozkład normalny



Test t



```
graph TD; A[Porównanie dwóch prób] --> B[Próby niezależne]; B --> C[Rozkład normalny]; C --> D[Test t];
```

Porównanie dwóch prób



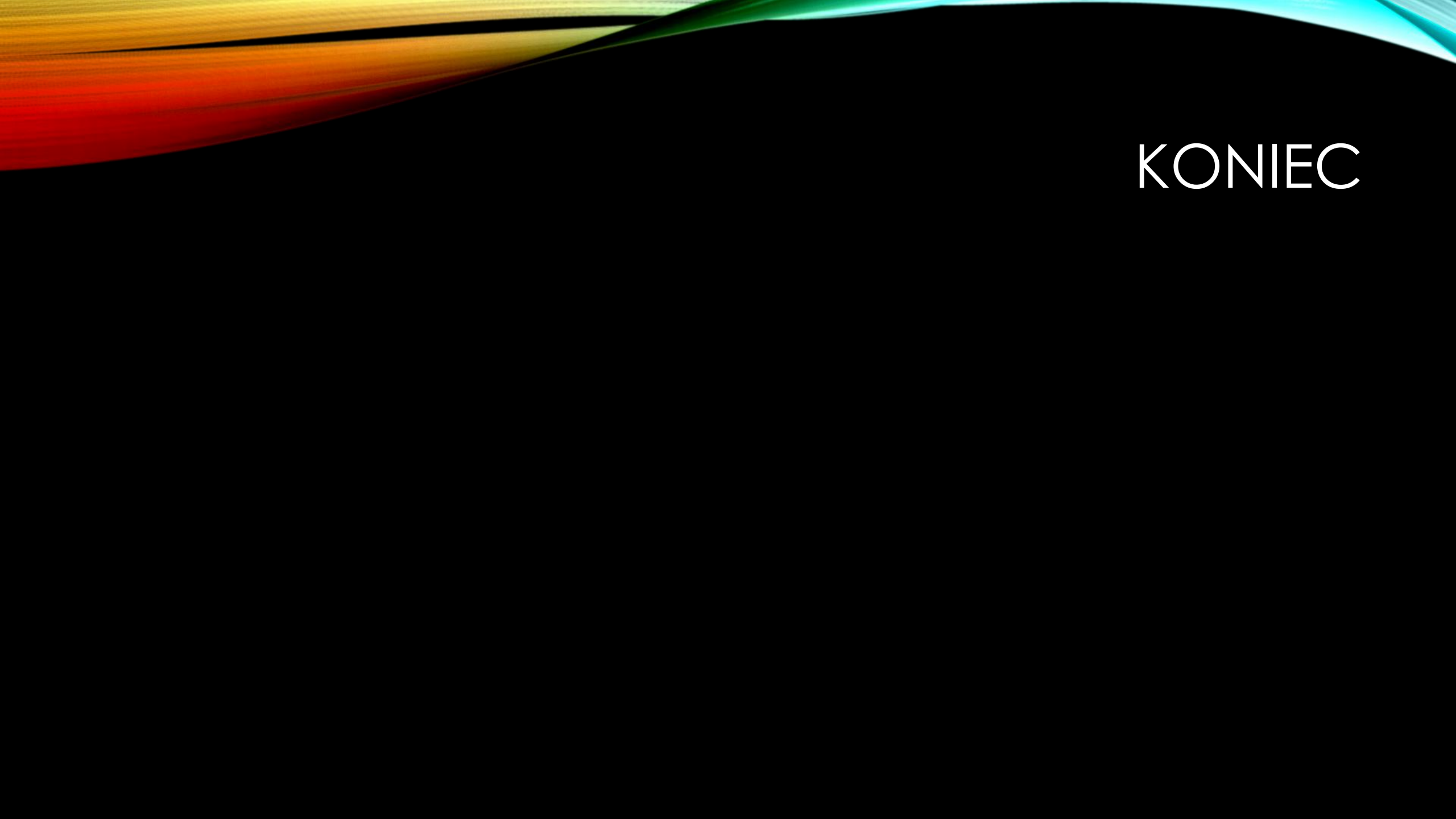
Próby niezależne



Rozkład normalny



Test t



KONIEC